PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía 9 - MAT1203

1. Considere el espacio vetorial $\mathbb{P}_3$ y $H = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 : p(1) = p(2) = p(0)\}$. Determine una base y la dimensión de H.

2. Sea $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   a) Demuestre que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Determine $\mathbf{x}$ tal que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

   c) Encuentre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

3. Determine la dimensión del espacio columna y del núcleo de la matriz A cuya como forma escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas demuéstrelo en general. Si es falsa muestre un contraejemplo.

   a) Si existe un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ que genera a V, entonces $\dim V \leq p$.

   b) Si $p \geq 2$ y $\dim V = p$, entonces cada conjunto de $p - 1$ vectores distintos de cero es linealmente independiente.