PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 8: Independencia Lineal

1. Determine si los vectores son linealmente independientes. Justifique cada respuesta.

   a) $\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\2\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\4\\-8\end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}.$

2. Determine si las columnas de la matriz forman un conjunto linealmente independiente. Justifique sus respuestas.

   a) $\begin{bmatrix}0 & -3 & 9\\2 & 1 & -7\\-1 & 4 & -5\\1 & -4 & -2\end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix}1 & 4 & -3 & 0\\-2 & -7 & 5 & 1\\-4 & -5 & 7 & 5\end{bmatrix}$

3. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\9\\-6\end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix}5\\-7\\h\end{bmatrix}.$$

   a) ¿Para qué valores de h está v_3 en $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

   b) ¿Para qué valores de h el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente?

4. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-3\\-5\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\9\\15\end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix}2\\-5\\h\end{bmatrix}.$$

   a) ¿Para qué valores de h está v_3 en $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

   b) ¿Para qué valores de h el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente?

5. A partir de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, observe que la tercera columna es la suma de las dos primeras. Encuentre una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

6. A partir de $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$, observe que la primera columna menos la segunda columna multiplicada por 3 es igual a la tercera columna. Determine una solución no triavial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

7. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique cada respuesta.

   a) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ están en $\mathbb{R}^4$, y $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente dependiente.

   b) Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ está en $\mathbb{R}^4$ y $\mathbf{v}_2$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente.

   c) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$ están en $\mathbb{R}^5$ y $\mathbf{v}_3 = 0$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ es linealmente dependiente.

   d) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ están en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{v}_3$ no es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

   e) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ están en $\mathbb{R}^4$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ también es linealmente dependiente.

   f) Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^4$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ también es linealmente independiente.