Ayudantía 12
Álgebra Lineal - MAT1203

Ejercicio 1

Considere la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

y suponga que los valores propios de A son $-2, -1$ y 0.

(a) **¿Por qué puede asegurar que A es diagonalizable?**

Como la matriz tiene 3 valores propios **distintos**, cada uno tendrá una multiplicidad algebraica igual a 1, y por lo tanto al menos un vector propio asociado. Esto garantiza que existen 3 vectores propios linealmente independientes, lo cual implica que A es diagonalizable.

(b) **Diagonalice la matriz A. Encuentre P y D tal que $A = PDP^{-1}$.**

Para cada valor propio λ, resolvemos $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$:

- Para $\lambda = -2$, un vector propio es: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- Para $\lambda = -1$, un vector propio es: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Para $\lambda = 0$, un vector propio es: $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Entonces:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) **Determine una expresión para A^8**

Como $A = PDP^{-1}$, entonces:

$$A^8 = PD^8P^{-1}, \quad \text{y} \quad D^8 = \begin{bmatrix} (-2)^8 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Sea la transformación lineal:

$$T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4, \quad T(p) = \begin{bmatrix} p(-2) \\ p(3) \\ p(1) \\ p(0) \end{bmatrix}$$

(a) **Demuestre que T es una transformación lineal.**

Sean $p(t), q(t) \in \mathcal{P}_3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$T(p+q) = \begin{bmatrix} p(-2)+q(-2) \\ p(3)+q(3) \\ p(1)+q(1) \\ p(0)+q(0) \end{bmatrix} = T(p) + T(q)$$

$$T(\alpha p) = \begin{bmatrix} \alpha p(-2) \\ \alpha p(3) \\ \alpha p(1) \\ \alpha p(0) \end{bmatrix} = \alpha T(p)$$

Por lo tanto, T es lineal.

(b) **Encuentre la matriz de T respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ y la base estándar de $\mathbb{R}^4$.**

Calculamos:

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(t^3) = \begin{bmatrix} -8 \\ 27 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de T es:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, donde A tiene valores propios $1, 5, -2$.

¿Existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de T respecto de B sea diagonal?

Respuesta:

Sí. Como los tres valores propios de A son distintos, cada uno tiene multiplicidad algebraica 1. Esto asegura la existencia de 3 vectores propios linealmente independientes.

Por lo tanto, existe una base de $\mathbb{R}^3$ compuesta por vectores propios, y en dicha base la matriz de T es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Conclusión: sí, existe una base B tal que $[T]_B$ es una matriz diagonal.