PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía 5 - MAT1203

1. Encuentre el valor de h que hace a los siguientes vectores linealmente dependientes:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$$

Solución:

Queremos hallar h tal que los vectores sean linealmente dependientes. Esto ocurre si $Mx = 0$ tiene una solución no trivial.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & h & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & h & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & h+4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para que la última fila sea nula: $h + 4 = 0 \Rightarrow h = -4$.

2. Sea T la transformación definida por $T(x, y, z) = (x, x + y, xz)$. Determine si T es una transformación lineal.

Solución:

Sea

$$u = (2, 1, 3), \quad c = 2.$$

a) Calculamos $T(cu)$:

$$cu = (4, 2, 6),$$

$$T(4, 2, 6) = (4,\ 4 + 2,\ 4 \cdot 6) = (4, 6, 24).$$

b) Calculamos $cT(u)$:

$$T(2, 1, 3) = (2,\ 2 + 1,\ 2 \cdot 3) = (2, 3, 6),$$

$$2T(u) = 2(2, 3, 6) = (4, 6, 12).$$

Observe que

$$T(cu) = (4, 6, 24), \qquad cT(u) = (4, 6, 12).$$

Coinciden en las dos primeras coordenadas, pero difieren en la tercera ($24 \neq 12$). Por lo tanto T no es transformación lineal.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ y defina la transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   a) Determine el dominio y el codominio de T.

   b) ¿Porqué T es una transformación lineal?

   c) Encuentre todos los vectores x de $\mathbb{R}^4$ que son transformados en el vector nulo por la transformación T.

   d) ¿El vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertenece al rango (recorrido) de la transformación lineal T?

Solución:

a) El dominio de T es $\mathbb{R}^4$ (4 columnas), el codominio es $\mathbb{R}^3$ (3 filas).

b) T es lineal porque cumple:

$$T(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v), \qquad T(cu) = A(cu) = cAu = cT(u).$$

c) Resolver $Ax = 0$. Tras reducción:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí $x_4 = 0$, $x_2 = 3x_3$, $x_1 = 4x_3$. Con x_3 libre:

$$x = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Para ver si b está en el rango, se resuelve $Ax = b$. La reducción muestra que el sistema es consistente, luego b pertenece al rango.

4. Sean $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$, y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Encuentre las imágenes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = 5T(e_1) - 3T(e_2) = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

En general:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}.$$

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   a) Determine la matriz de la transformación.

   b) ¿Es cierto que T transforma conjuntos linealmente en conjuntos linealmente independientes?.

Solución:

Notamos que

$$(0,0,1) = e_3, \qquad (0,1,1) = e_2 + e_3, \qquad (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3.$$

Por linealidad,

$$T(e_3) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad T(e_2) = T(0,1,1) - T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(e_1) = T(1,1,1) - T(e_2) - T(e_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Así, la matriz de T (columnas $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$) es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

En general, una transformación lineal preserva independencia lineal si es inyectiva. Como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ no puede ser inyectiva (dimensión del dominio mayor que la del codominio), **no** es cierto en general.

Un contraejemplo concreto: el conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ es LI en $\mathbb{R}^3$, pero sus imágenes

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

son LD en $\mathbb{R}^2$. De hecho, se verifica

$$6\,T(e_1) + 5\,T(e_2) + 3\,T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo que muestra la dependencia con coeficientes no todos nulos.