Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
Guía 15

Problemas mínimos

1. Encuentre una solución de mínimos cuadrados y el error de mínimos cuadrados de $Ax = b$ donde
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Determine la recta de mínimos cuadrados (recta de regresión) que mejor se ajuste a los puntos $(0,1), (1,1), (2,2), (3,2)$.

3. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Compruebe que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A. Después diagonalice A ortogonalmente.

Problemas adicionales

4. Si a, b y c son números distintos, entonces el siguiente sistema es inconsistente
$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= a \\ x - 2y + 5z &= b \\ x - 2y + 5z &= c \end{aligned}$$
Demuestre que el conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados del sistema es el plano cuya ecuación es $x - 2y + 5z = \frac{a+b+c}{3}$.

   Si U es la matriz de coeficientes del sistema, ¿Es invertible la matriz U^TU? (recuerde el teorema visto en clases de solución de mínimos cuadrados única).

5. Suponga que A es invertible y diagonalizable ortogonalmente. Explique por qué A^{-1} también es diagonalizable ortogonalmente.

6. Determine si es verdadero o falso:
   (a) Las matrices simétricas sólo tienen valores propios reales.
   (b) Si $A^T = A$ y si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ satisfacen $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
   (c) Todas las matrices simétricas se pueden diagonalizar.