Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2025

Álgebra Lineal - MAT1203
Ayudantía 15

1. Sean P una matriz ortogonal de $m \times m$ y A una matriz de $m \times n$. Demuestre que si $\sqrt{\sigma}$ es valor singular de PA entonces $\sqrt{\sigma}$ también es valor singular de A.

   Solución. Supongamos que $\sqrt{\sigma}$ es valor singular de PA. Esto significa que σ es un valor propio asociado a
   $$(PA)^T PA = A^T P^T PA = A^T A$$
   donde usamos que P es ortogonal. Luego, tenemos que σ también es valor propio de $A^T A$. Así, por definición, concluimos que $\sqrt{\sigma}$ es valor singular de A.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$. Encuentre una descomposición en valores singulares de A.

   Solución. Como **Primer Paso** debemos obtener una diagonalización ortogonal de $A^T A$. Para ello primero calculamos
   $$A^T A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix}$$
   con ecuación característica
   $$\begin{aligned} (74-\lambda)(26-\lambda) - 32^2 &= 0 \\ (\lambda - 90)(\lambda - 10) &= 0 \end{aligned}$$
   de modo que $\lambda_1 = 90$ y $\lambda_2 = 10$ (notar que los numeramos de tal forma que están en **orden descendente**). Luego, calculamos sus vectores propios asociados:
   $$\lambda_1 = 90: \quad \left[\begin{array}{cc|c} -16 & 32 & 0 \\ 32 & -64 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v_1'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   $$\lambda_2 = 10: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 64 & 32 & 0 \\ 32 & 16 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v_2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y los normalizamos

$$\mathbf{v_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix} \qquad \mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

Como **Segundo Paso**, construimos nuestras matrices V y Σ, procurando mantener el orden descendente de los valores singulares, así como el orden de los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ con respecto a su valor singular asociado ($\sqrt{\lambda_1}$ y $\sqrt{\lambda_2}$, respectivamente).

$$V = \begin{bmatrix}\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0\\0 & \sqrt{\lambda_2}\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\sqrt{10} & 0\\0 & \sqrt{10}\\0 & 0\end{bmatrix}$$

El **Tercer Paso** es calcular la matriz U, para lo cual primero usaremos que

$$\mathbf{u_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}A\mathbf{v_1} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix}15/\sqrt{5}\\0\\15/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}A\mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}5/\sqrt{5}\\0\\-5/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Pero nos falta un tercer vector para que U sea de 3×3. En general, podemos resolver un sistema de ecuaciones tal que $\mathbf{u_i} \cdot \mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{u_i}$ previamente calculado ($\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ en nuestro caso), pero por inspección de los vectores obtenidos notamos que el vector $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ cumple inmediatamente con ser ortogonal a $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ además de tener norma 1. Así, finalmente armamos

$$U = \begin{bmatrix}\mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 1\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

completando nuestra descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$.

3. Demuestre que si A es una matriz cuadrada entonces $|det(A)|$ es el producto de los valores singulares de A.

Solución. Supongamos que A es de $n \times n$. Luego, su descomposición en valores singulares es de la forma $A = U\Sigma V^T$ con U, V, Σ de $n \times n$, con U y V matrices ortogonales, y Σ matriz diagonal. Luego, como solo tenemos matrices cuadradas, tiene sentido calcular el determinante:

$$\begin{aligned}|det(A)| &= |det(U\Sigma V^T)| = |det(U)det(\Sigma)det(V^T)| = |1 \cdot det(\Sigma) \cdot 1|\\ &= |\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n| = \prod_{i=1}^{n}\sigma_i\end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que el determinante de una matriz ortogonal es 1, y que los valores singulares $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ son no-negativos.