1. Un sistema de dos ecuaciones y tres variables no puede ser inconsistente.

Sol:

$$2\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}^{3} x = b$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Falso

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$F_{12}(-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$0 = -1$$

$\longrightarrow \longleftarrow$

2. Sean u, v, w vectores y A una matriz. Si $Au = 2w$ y $Av = 2w$, entonces $u = v$.

Sol: Falso

$$Au = Av \Rightarrow u = v$$

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \vec{0}$

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{w}$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{w}$$

$$\vec{u} \neq \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Falso

3. Si el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $Ax = \vec{0}$, entonces las columnas de A son L.D.

Sol:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$A = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$V_1 + 2V_2 - V_3 = \vec{0}$$

$$aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 = \vec{0}$$

$\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ LD

4. Si la F.E.R. de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $Ax = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

Sol: $Ax = 0$, es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 + 2x_3 = 0$$
$$\Rightarrow x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 = -2x_3$$

$$x_2 = -3x_3$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Infinitas soluciones

☑

5. El sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= a \end{aligned}$$

nunca es consistente.

Sol:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{array}\right] \xrightarrow[F_{13}(1)]{F_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & 0 & a-1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$F_{23}(-3)$, $F_{24}(1)$ $\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{array}\right] \rightarrow \neq 0$$

$= 0$

$a \neq 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{a-3} \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{array}\right] F_{34}(-1)$$

$$(a-2) - \frac{5}{a-3} = 0$$

$$\frac{5}{a-3} = a-2 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-3) = 5$$

$$a^2 - 5a + 6 = 5$$

$$a^2 - 5a + 1 = 0$$

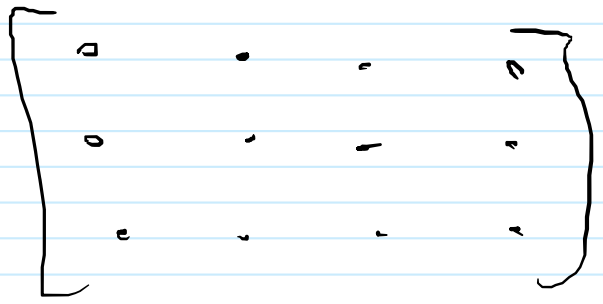
$$\frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = a$$

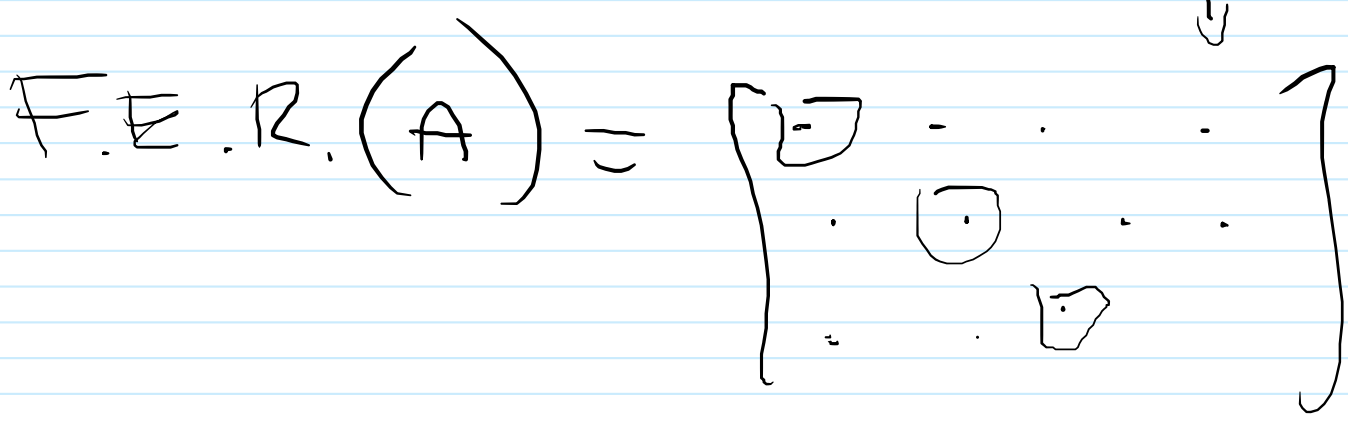
$$\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} = a$$

False ☒

Columnas LI.

1. Si A es una matriz de 3×4, entones A no puede ser inyectiva.

Sol: $A_{3\times 4} =$ 



$\rightarrow$ Verdadero.

Como tenemos una columna sin pivote, las columnas son LD.

2. Si A es una matriz de 4×2 y u un vector de $\mathbb{R}^2$, tales que la suma de las columnas de A es igual a Au, entonces $u - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Nul(A)$.

$$Nul(A) := \{ x \mid Ax = 0 \}$$

$$A\left(u - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ = Suma de las columnas

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Au$$

$$Au - A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$A\left(u - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$u - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Nul(A)$$

$\square$