PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 11: La inversa de una matriz

1. Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ y utilícela para resolver el sistema

$$\begin{array}{rcr} 8x_1 + 6x_2 & = & 2 \\ 5x_1 + 4x_2 & = & -1 \end{array}$$

2. Encuentre la inversa de la matriz $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ y utilícela para resolver el sistema

$$\begin{array}{rcr} 7x_1 + 3x_2 & = & -9 \\ -6x_1 - 3x_2 & = & 4 \end{array}$$

3. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   a) Determine A^{-1} utilícela para resolver las ecuaciones

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1\,, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2\,, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3\,, \quad A\mathbf{x} = ?\mathbf{b}_4\,.$$

   b) Las cuatro ecuaciones del inciso *a*) se pueden resolver con el mismo conjunto de operaciones fila, ya que la matriz de coeficientes es la misma en cada caso. Resuelva las cuatro ecuaciones del inciso *a*) mediante la redución por filas de la matriz aumentada $[A\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4]$.

4. Suponga que P es invertible y $A = PBP^{-1}$. Determine B en términos de A.

5. Si A, B y C son matrices invertibles de $n \times n$, ¿la ecuación

$$C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$$

   tiene solución, X? Si es así, encuéntrela.

6. Suponga que A, B y X so matrices de $n \times n$ con A, X y $A - AX$ invertibles, y soponga que

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B \tag{1}$$

a) Explique por qué B es invertible.

b) Despeje X en la ecuación (**??**). Si se necesita invertir una matriz, explique por qué esta matriz es invertible.

7. Use el algoritmo de reducción por filas para encontrar las inversas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea A la matriz de $n \times n$ correspondiente, y sea B su inversa. Infiera la forma de B, y después demuestre que $AB = I$.

8. Repita la estrategia del ejercicio anterior para inferir la inversa de B de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Demuestre que $AB = I$.

9. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre la tercera columna de A^{-1} sin calcular las otras columnas.