PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 14: Factorización $A = LU$ y $PA = LU$

1. Encuentre la matriz triangular inferior L con unos en la diagonal y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$.

   a) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -56 & 73 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0 & 3 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 \\ 20 & 24 & -30 \\ -20 & -24 & 22 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

   f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. Resuelva el sistema dada usando la factorización LU. Esto es, resuelva $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 18 & -19 & 17 \\ -27 & 36 & -39 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

   d) $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 26 \\ -36 & -48 & -101 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$

   e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 4 & -10 & -8 & -8 \\ 24 & -52 & -53 & -43 \\ 20 & -18 & -63 & -28 \\ 32 & -128 & -34 & -91 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$

3. Encuentre una matriz de permutación P y matrices triangulares inferior y superior L y U tales que $PA = LU$; b) utilice el resultado del inciso a) para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

   c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$.

   e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   f) $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & -9 & 0 \\ 48 & 72 & -42 & -17 \\ 40 & 54 & -41 & -8 \\ 0 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

4. Demuestre que $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$ tiene más de una factorización LU.

5. Realice el mismo procedimiento con la matriz $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

6. Encuentre una factorizacion LU para cada matriz singular:

   a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 13 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \\ -6 & -13 & 1 & 10 \\ 2 & -24 & 2 & 20 \end{bmatrix}$

7. Encuentre una factorización LU para cada matriz no cuadrada.

$a)$ $\begin{bmatrix} -2 & -7 & -2 & 2 \\ -8 & -35 & -17 & 7 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ $c)$ $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$