PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Ayudantía 5 - MAT1203

1. Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, si existe.

   Solución:

   $$[A \;\; I] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Operación: $F_2 \to F_2 + F_1, \quad F_3 \to F_3 - 5F_1$

   $$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Operación: $F_3 \to F_3 - 2F_2$

   $$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Así, $[A \;\; I]$ es ahora equivalente por filas a la matriz de la forma $[B \; D]$, donde B es una matriz cuadrada y tiene una fila de ceros. Por tanto vemos que no es posible transformar por medio de operaciones por fila B en I, por tanto que el proceso se detiene. A **no** tiene una inversa.

2. Resuelva la siguiente ecuación matricial para encontrar X (suponga que las matrices involucradas son tales que todas las operaciones indicadas están definidas):

   $$A^{-1}(BX)^{-1} = \left(A^{-1}B^3\right)^2$$

   Solución: Expandimos la matriz cuadrada

   $$A^{-1}(BX)^{-1} = A^{-1}B^3A^{-1}B^3$$

   Luego, usando que $(M^{-1})^{-1} = M$ y usando la propiedad de la inversa de un producto

   $$\begin{aligned} (BX)^{-1} &= B^3A^{-1}B^3 \\ BX &= (B^3A^{-1}B^3)^{-1} \\ BX &= B^{-3}AB^{-3} \\ X &= B^{-4}AB^{-3} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$X = B^{-4}AB^{-3}$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre la tercera columna de A^{-1} sin calcular las otras columnas.

Solución: Es fácil ver que para una matrix A invertible, la tercera columna de A^{-1} estará dada por $A^{-1}\mathbf{e}_3$, por tanto basta con resolver el sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3 \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{e}_3$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz aumentada $[A \,|\, \mathbf{e}_3]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: $F_1 \to -F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2: $F_2 \to F_2 - 2F_1$, $F_3 \to F_3 - F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 3: $F_3 \to F_3 + 4F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 4: $F_3 \to -F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Paso 5: Eliminamos hacia arriba:

$$F_1 \to F_1 - 3F_3, \quad F_1 \to F_1 - 7F_2 \quad \text{(ya que } F_2 \text{ no cambió, se puede hacer directamente)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Entonces:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tercera columna de } A^{-1}: \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Escriba la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Solución: Queremos escribir A^{-1} como producto de matrices elementales, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicamos operaciones fila para reducir A a la identidad. A cada operación fila corresponde una matriz elemental E_i, y:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$$

Paso 1: Intercambiamos $F_1 \leftrightarrow F_3$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 2: $F_2 \to -\frac{1}{3}F_2$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: $F_3 \to F_3 + 6F_1$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4: $F_3 \to F_3 - 2F_2$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = E_4 E_3 E_2 E_1$$

5. Considere la transformación lineal $T\left(x_1, x_2\right) = (-5x_1 + 9x_2, 4x_1 - 7x_2)$

   a) Determine la matriz de la transformación.

   b) Demuestre que T es una transformación invertible.

   c) Encuentre una fórmula para T^{-1}.

   Solución:

   Sea la transformación lineal:

$$T(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2,\ 4x_1 - 7x_2)$$

   a) La matriz asociada a T es:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

   b) Vemos que:

$$\det(A) = (-5)(-7) - (9)(4) = 35 - 36 = -1 \neq 0$$

   Como $\det(A) \neq 0$, la transformación T es invertible.

   c) Usamos la fórmula de la matriz inversa de una matriz 2x2:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

   Luego,

$$T^{-1}(y_1, y_2) = (7y_1 + 9y_2,\ 4y_1 + 5y_2)$$

6. Demuestre que:

a) Si existe una matriz D de $n \times n$ tal que $AD = I_n$, entonces $DA = I_n$.

b) Si A es de tamaño $n \times n$ y sus columnas son linealmente independientes, entonces las columnas de A^2 generan a $\mathbb{R}^n$.

Solución:

a) Vemos que multiplicando por A a la derecha la igualdad del enunciado tenemos

$$ADA = A$$
$$A(DA) = A$$

Luego necesariamente $DA = I_n$

b) Como A tiene columnas linealmente independientes entonces es una matriz invertible. Luego $A^2 = AA$ de n x n es invertible al ser producto de matrices invertibles. Finalmente, como A^2 es una matriz invertible n x n entonces necesariamente sus columnas generan $\mathbb{R}^n$