1. Dado que $0\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\3\\3\\4\end{pmatrix}=\vec{0}$, entonces el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$ es L.D.

Sol: Falso, la solución trivial siempre existe (LD o LI).

$\exists\ \alpha,\beta, \neq 0$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\3\\3\\4\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \alpha\cdot 0+\beta\cdot 4=0$$

$$4\beta=0$$

$$\boxed{\beta=0}.$$

$$\alpha\cdot 1+\beta\cdot 1=0$$

$$\boxed{\alpha=0}$$

$\Rightarrow$ Son LI.

2. Si u, v, w son vectores tales que $u = 2v - w$, entonces $\text{Gen}\{u, v, w\} = \text{Gen}\{u, v\}$.

Sol: Verdadero

PD: $Gen(u,v,w) \subseteq Gen(u,v)$

Sea $x \in Gen(u,v,w)$

$\Rightarrow x = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$u = 2v - w$

$w = 2v - u$

$x = \alpha u + \beta v + \gamma (2v - u)$

$x = (\alpha - \gamma) u + (\beta + 2\gamma) v$

$x \in Gen(u,v)$

PD: $Gen(u,v) \subseteq Gen(u,v,w)$

Sea $x \in Gen(u,v)$

$x = \alpha u + \beta v + 0 w$

$\Rightarrow Gen(u,v,w)$

$Gen(u,v) = Gen(u,v,w)$

3. La recta $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ está contenida en el plano de ecuación $3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$.

Π

$x \in L$,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3(1+\lambda) + (2) - 2(3+\lambda)$$

$$3+3\lambda + 2 - 6 - 2\lambda$$

$$-1 + \lambda \neq -1$$

$\lambda = 1 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$3 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 4 = 6 + 2 - 8$$

$$= 0 \neq -1$$

Falso.

4. Todo hiperplano en $\mathbb{R}^5$ que pasa por el origen es un conjunto generado por 4 vectors L.I. (Verdadero)

Sol: Un hiperplano en $\mathbb{R}^5$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 + f = 0$$

(Pasa por origen) $f = 0$ $\quad x_i \in \mathbb{R},\ i \in (1 \to 5)$

$x_i = 0$,

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 0$$

Sin pérdida de generalidad, $a \neq 0$

$$x_1 + \frac{b}{a}x_2 + \frac{c}{a}x_3 + \frac{d}{a}x_4 + \frac{e}{a}x_5 = 0$$

$$x_1 = -\left(\frac{b}{a}x_2 + \frac{c}{a}x_3 + \frac{d}{a}x_4 + \frac{e}{a}x_5\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3 - \frac{d}{a}x_4 + \frac{e}{a}x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$X = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{e}{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4}$$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ L.I.

$$\Pi := \text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

5. Si A es una matriz de $n \times 3$, entonces la suma de las columnas de A es $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol: Verdadero

A, con columnas v_1, v_2, v_3.

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 1 + v_3 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 + v_2 + v_3 \end{bmatrix}$$

6. Si $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, entonces existe x tal que $Ax=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

Sol: $A=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1+v_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1+v_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1+v_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}v_1+v_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_2-v_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_2-v_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1+v_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1+2v_2-v_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

A ↓

2