Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1203 - Álgebra Lineal
PAUTA Interrogación 3

Problema 1.

Sea V el espacio vectorial de las matrices simétricas de 2×2 y $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de V. Sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz cambio de base tal que para toda matriz simétrica A en V se tiene

$$P[A]_{B_1} = [A]_{B_2}$$

donde B_2 es una cierta base de V. Encuentre la base B_2.

Solución versión 1:

Sea $B_2 = \{M_1, M_2, M_3\}$. Del enunciado se tiene que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1M_1 + 2M_2 + 1M_3$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = M_2$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2M_1 + M_2 + 3M_3.$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = M_1 + M_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2M_1 + 3M_3$$

$$\Longrightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución versión 2:

Sea $B_2 = \{M_1, M_2, M_3\}$. Calculamos primero la inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P^{-1} es la matriz de cambio de base de B_2 a B_1. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = [M_1]_{B_1} \quad , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [M_2]_{B_1}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = [M_3]_{B_1}.$$

Esto implica que

$$M_1 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -10 & -6 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 3 puntos por relacionar correctamente las columnas de P (o alternativamente de P^{-1}) con las coordenadas de los elementos de B_1 (o alternativamente de B_2).
- 3 puntos por determinar correctamente la base B_2.

Problema 2.

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{P}_2$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - 2d) + (2a - b)x + (b - 4d)x^2.$$

Determine una base para $\text{Nul}(T)$ y para $\text{Im}(T)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\text{Nul}(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a = 2d, \quad b = 4d \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2d & 4d \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Gen\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\text{Nul}(T)$ ya que dichas matrices son linealmente independientes.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\text{Im}(T) &= \left\{ T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(a - 2d) + (2a - b)x + (b - 4d)x^2 | a, b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1 + 2x) + b(-x + x^2) + d(-2 - 4x^2) | a, b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= Gen\{1 + 2x, \quad -x + x^2, \quad -2 - 4x^2\} \\ &= Gen\{1 + 2x, \quad -x + x^2\}\end{aligned}$$

donde $\{1 + 2x, -x + x^2\}$ es una base de $\text{Im}(T)$ ya que los polinomios son LI por tener grado distinto.

Puntaje:

- 3 puntos por una base de $\text{Nul}(T)$.
- 3 puntos por una base de $\text{Im}(T)$.

Problema 3.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule

$$\lim_{k \to \infty} A^k \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Solución versión 1:

Los valores propios de A son $\frac{1}{3}$ y 1. Más aún, los espacios propios asociados son:

$$E\left(\frac{1}{3}\right) = \text{Nul}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E(1) = \text{Nul}\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Por otro lado notamos que $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Esto implica:

$$\begin{aligned} A^k\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} &= 7A^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3A^k\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 7\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3(1)^k\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{3^k} - 9 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solución versión 2:

Conociendo los espacios propios determinados anteriormente, podemos diagonalizar A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

y por lo tanto

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3^k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A^k\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} &= \lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3^k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3^k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{3^k} \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{7}{3^k} - 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puntaje:

- 1 punto por encontrar base de vectores propios.
- 2 puntos por determinar cómo actúa A^k en cada vector propio o alternativamente por diagonalizar A^k.
- 2 punto por determinar $A^k\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.
- 1 punto por calcular $\lim_{k\to\infty} A^k\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Problema 4.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ -2 & \beta & 2 \\ -1 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine los valores de α, β y γ para que A sea diagonalizable con columnas de P como sus vectores propios.

Solución:

Se buscan α, β y γ tales que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ para ciertos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Esto es

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ -2 & \beta & 2 \\ -1 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2-2\alpha & \alpha \\ 0 & -4-2\beta & \beta \\ 0 & -2-2\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Puntaje:

- 2 puntos por relacionar la matriz A con P de manera correcta a través de la diagonalización.
- 2 puntos determinar ecuaciones con α, β y γ.
- 2 puntos calcular correctamente α, β y γ.

Problema 5.

Sea

$$U = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Determine una base de $U^{\perp}$.

b) Dado $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ determine u y w tal que $v = u + w$ con $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$.

Solución:

Defina $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a)

$$U^{\perp} = (\text{Col}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A^T) = \text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= Gen\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donde estos tres vectores son LI y por lo tanto forman una base de $U^{\perp}$.

b) Para encontrar el vector u, proyectamos el vector v usando la matriz de proyección $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ sobre el espacio columna de A.

Primero notar que $A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ por lo que $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. De esta forma

$$u = Pv = A(A^TA)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = A(A^TA)^{-1}\begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{8}A\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$w = v - u = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 2 puntos por determinar una base para $U^{\perp}$.
- 2 puntos por determinar establecer que $u = proy_U(v)$ y que $w = v - u$.
- 2 puntos por calcular correctamente u y w.

Problema 6.

Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}$ es una transformación lineal entonces T no es sobreyectiva.

b) Sea A matriz de 2×2 con valores propios 1 y 2. Si B es una matriz de 2×2 con valores propios 1 y 2 entonces A y B son similares.

Solución:

a) **Verdadero**. Se tiene que $dim\mathbb{P}_2 = 3$ y $dim\mathbb{M}_{2\times 2} = 4$. Además,

$$dim\mathbb{P}_2 = dim\,\mathrm{Nul}(T) + dim\,\mathrm{Im}(T)$$

Como $0 \leq dim\,\mathrm{Nul}(T) \leq 3$ entonces $0 \leq dim\,\mathrm{Im}(T) \leq 3$, por lo que $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{M}_{2\times 2}$.

b) **Verdadero**. Se tiene que A y B son diagonalizables, por lo que existen matrices invertibles P y Q tales que

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$B = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP.$$

De esta forma

$$B = Q(P^{-1}AP)Q^{-1} = (QP^{-1})A(QP^{-1})^{-1}$$

por lo que A y B son similares.

Puntaje:

- 3 puntos por cada afirmación correctamente justificada.