PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Interrogación 2 MAT1203 - 25 de mayo

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo.

1. *a*) Sea $u \in \mathbb{R}^3$. Si u es unitario, entonces la matriz $P = u\,u^T$ es simétrica y $P^2 = P$.
Solución:

Verdadero.

Primero se tiene que $P^T = (u\,u^T)^T = u^{T^T}\,u^T = u\,u^T$.

Segundo se tiene que $P^2 = (u\,u^T)(u\,u^T) = u\,(u^T u)\,u^T$.

Como $u^T u$ es de 1×1, entonces se puede cambiar el orden:

$P^2 = (u^T u)\,(u\,u^T)$.

Pero u es unitario, luego $u^T u = 1$, entonces $P^2 = u\,u^T = P$.

b) Si A es una matriz tal que $\mathrm{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$ y b un vector tal que $b \in \mathrm{Im}(A)$, entonces el sistema $Ax = 3b$ tiene solución y es única.
Solución:

Verdadero.

Como $b \in \mathrm{Im}(A)$, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución.

Sea u esta solución, entonces $Au = b$. Luego $A(3u) = 3b$.

Por último, $\mathrm{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$, entonces A es inyectiva. Por lo tanto la solución $3u$ es única.

2. *a*) Si U es una matriz en forma escalonada que resulta de hacer en una matriz A de 3×4 lo siguiente: sumar a la fila 2 cinco veces la fila 1, restar a las fila 3 cuatro veces la fila 1 y por último, sumar a la fila 3, la mitad de la fila 2, entonces $A = LU$ con $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Verdadero.

Se tiene que:

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. representa $F_2 \to F_2 + 5F_1$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. representa $F_3 \to F_3 - 4F_1$.

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$. representa $F_3 \to F_3 + (1/2)F_2$

Entonces $E_3\, E_2\, E_1\, A = U$, luego $A = {E_1}^{-1} {E_2}^{-1} {E_3}^{-1} U$.

Sacando las inversas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} U.$$

Multiplicando:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} U.$$

2a) muchas respuestas son del tipo

$F_2 \to F_2 + 5F_1$

$F_3 \to F_3 - 4F_1$

$F_3 \to F_3 + \frac{1}{2}F_2$

$\to \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

esto no es una demostración, pero sí es el cálculo de L. Como analogía es como si en el curso de cálculo se pidiera demostrar que la derivada de $f(x) = x^2$ es $2x$. Para demostrarlo se calcula el límite, no se usa la regla de derivada de x^n

b) Sea A una matriz de 3×3 que admite $A = LU$. Si $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces el primer elemento de la tercera fila de A es cero.

Solución:

Verdadero.

Dado que $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces para obtener U sólo se hizo la operación elemental $F_2 \to F_2 + 5F_1$.

Entonces la fila 3 de A no fue alterada y es igual a la fila 3 de U. Como U está en forma escalonada, la tercera fila no puede tener pivotes en la primera columna, luego el primer elemento de la tercera fila de A es cero.

3. *a)* Sean $u, v \in \mathbb{R}^4$. Si $1 - u \cdot v \neq 0$, entonces

$$(I - uv^T)^{-1} = I + \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) uv^T.$$

Solución:

Verdadero.

Hay que demostrar que $(I - uv^T)(I + \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) uv^T) = I$.

Multiplicando se obtiene:

$$I + \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) uv^T - uv^T - uv^T \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) uv^T.$$

Reordenando los escalares se obtiene:

$$I + \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) uv^T - uv^T - \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) (uv^T)(uv^T).$$

Asociando en la última matriz se obtiene:

$$I + \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) uv^T - uv^T - \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) u(v^T u)v^T.$$

Pero $v^T u$ es un escalar, reordenando se obtiene:

$$I + \left(\frac{1}{1 - u^T v}\right) uv^T - uv^T - \left(\frac{v^T u}{1 - u^T v}\right) uv^T.$$

Factorizando se obtiene:

$$I + \left(\frac{1 - (1 - u^T v) - v^T u}{1 - u^T v}\right) uv^T.$$

Pero $v^T u = u^T v$, reemplazando se obtiene:

$$I + \left(\frac{u^T v - u^T v}{1 - u^T v}\right) uv^T = I + 0 \cdot uv^T = I.$$

b) Si $a > 3$, entonces la matriz

$$\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{bmatrix}$$

es positiva definida y su determinante es $a(a-3)^2$.
Solución:

Verdadero.

Se calcula el determinante por cofactores:

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (a-2)[(a-2)^2-1] - [a-2-1] + [1-(a-2)] \\ &= (a-2)[a^2-4a+3] - 2[a-3] \\ &= [a-3]((a-2)(a-1)-2) \\ &= [a-3](a^2-3a) \\ &= a(a-3)^2 \end{aligned} \quad .$$

Para que sea definida positiva se busca que los determinantes de las submatrices principales sean todos positivos:

Debe cumplirse que $a-2>0$, $(a-2)^2-1>0$ y $a(a-3)^2>0$.

Como $a > 3$, entonces $a > 2$, $(a-1)(a-3) > 0$ y $a(a-3)^2 > 0$, por lo tanto la matriz es definida positiva.

3b) si una matriz tiene determinante positivo, NO significa que sea definida positiva, por ejemplo

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. *a*) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\text{Det}[u\ v] = 2$, $\text{Det}[u\ w] = 8$ y $\text{Det}[v\ w] = 16$, entonces $-8u + 4v = w$.

Solución:

Verdadero.

Como $\text{Det}[u\ v] = 2$, no es cero, entonces la matriz $[u\ v]$ es invertible y el conjunto $\{u, v\}$ genera todo $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto existen α y β tales que:

$$w = \alpha u + \beta v.$$

• Como $\text{Det}[u\ w] = 8$, reemplazando se tiene $\text{Det}[u\ \alpha u + \beta v] = 8$.

Tomando traspuesta $\text{Det}\begin{bmatrix} u^T \\ \alpha u^T + \beta v^T \end{bmatrix} = 8$.

Haciendo la operación $F_2 \to F_2 - \alpha F_1$ queda $\text{Det}\begin{bmatrix} u^T \\ \beta v^T \end{bmatrix} = 8$.

Sacando β se obtiene $\beta\,\text{Det}\begin{bmatrix} u^T \\ v^T \end{bmatrix} = 8$.

Tomando traspuesta y reemplazando queda $\beta \cdot 2 = 8$, luego $\beta = 4$.

• Como $\text{Det}[v\ w] = 16$, reemplazando se tiene $\text{Det}[v\ \alpha u + \beta v] = 16$.

Tomando traspuesta $\text{Det}\begin{bmatrix} v^T \\ \alpha u^T + \beta v^T \end{bmatrix} = 16$.

Haciendo la operación $F_2 \to F_2 - \beta F_1$ queda $\text{Det}\begin{bmatrix} v^T \\ \alpha u^T \end{bmatrix} = 16$.

Sacando α se obtiene $\alpha\,\text{Det}\begin{bmatrix} v^T \\ u^T \end{bmatrix} = 16$.

Intercambiando filas queda $-\alpha\,\text{Det}\begin{bmatrix} u^T \\ v^T \end{bmatrix} = 16$.

Tomando traspuesta y reemplazando queda $-\alpha \cdot 2 = 16$, luego $\alpha = -8$.

Finalmente $w = -8u + 4v$.

4a) muchas respuestas son del tipo Si $w = -8u + 4v$

entonces

$$|uw| = |u(-8u+4v)|$$
$$= |u(4v)|$$
$$= 4|u^2 v|$$
$$= 4 \cdot 2 = 8$$

se cumple

$$|vw| = |v(-8u+4v)|$$
$$= |v(-8u)|$$
$$= -8|vu|$$
$$= 8|uv|$$
$$= 8 \cdot 2 = 16$$

se cumple

Pero lo anterior se demostró que

Si $w = -8u + 4v$, entonces

$|u \times w| = 8$ y $|v \times w| = 16$

lo que se pedía demostrar era "para el otro lado" es decir

Si $|u \times w| = 8$ y $|v \times w| = 16$

entonces $w = 8u + 4v$

b) En el espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos, el conjunto $\{p(t)$ tal que $p(-1) = 0\}$ es un conjunto generado por dos polinomios linealmente independientes.

Solución:

Verdadero.

El conjunto es $\{p(t) = at^2 + bt + c$ tal que $p(-1) = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Desarrollando la condición queda:

$\{p(t) = at^2 + bt + c$ tal que $a - b + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Reemplazando se obtiene:

$\{p(t) = at^2 + bt + -a + b$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$.

Reescribiendo:

$\{p(t) = a(t^2 - 1) + b(t + 1)$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$.

Entonces queda el conjunto de todas las combinaciones lineales de los polinomios $t^2 - 1$ y $t + 1$. Esto es:

Gen$\{t^2 - 1, t + 1\}$.

Estos dos polinomios son L.I. puesto que si $\alpha(t^2 - 1) + \beta(t + 1) = 0$ se tiene:

$(\alpha)(t^2) + (\beta)(t) + (-\alpha + \beta)(1) = 0t^2 + 0t + 0$.

Igualando coeficientes queda $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $-\alpha + \beta = 0$.

Por lo tanto la única forma de combinar a $t^2 - 1$ y $t + 1$ para obtener el polinomio cero es la trivial, luego el conjunto es L.I.

Nota: También es posible responder esta pregunta probando que el conjunto es un subespacio (aunque esa materia no entraba en esta prueba). Si se resuelve de esta manera debe probar que el conjunto tiene al menos un elemento y que es cerrado bajo la suma y la ponderación escalar. Lo anterior sólo demuestra

que el conjunto, al ser subespacio, es un conjunto generado. Probar que está generado por dos polinomios L.I. se debe hacer aparte.