PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA LINEAL (MAT1203)
EJERCICIOS RESUELTOS - 2019-2

AYUDANTE: FELIPE ZAMBRANO.

---

1) Tema: Factorización $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$. Si A es una matriz con descomposición $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determine, usando esta factorización (sin calcular $\mathbf{A}$ ni $\mathbf{A}^T$), la tercera fila de $\mathbf{A}^{-1}$.

Solución: La tercera fila de $\mathbf{A}^{-1}$ es la tercera columna de la transpuesta $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$. Esta, a su vez, es la solución de $\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ahora, como $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, se tendrá que $\mathbf{A}^T\mathbf{P}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T$, así, $\mathbf{A}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T\mathbf{P}$. De esta manera, resolver $\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es equivalente a resolver

$$\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T\mathbf{P}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hagamos, primero, $\boldsymbol{z} = \mathbf{L}^T\mathbf{P}\boldsymbol{x}$, entonces

$$\mathbf{U}^T\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora resolvemos $\mathbf{L}^T\mathbf{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ con la sustitución $\boldsymbol{y} = \mathbf{P}\boldsymbol{x}$,

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, resolvemos $\mathbf{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

$$\mathbf{P}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la tercera fila de la inversa de la matriz $\mathbf{A}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Tema: Descomposición Cholesky. Encuentre una factorización Cholesky ($\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$) para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

Solución: Primero hallamos una factorización $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{f}_2 - \mathrm{f}_1 \\ \sim \\ \mathrm{f}_3 - 3\mathrm{f}_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ \mathrm{f}_3 + \frac{1}{2}\mathrm{f}_2 \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

De las operaciones anteriores, resulta $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ y, a partir de la diagonal principal de $\mathbf{U}$ construimos $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puede comprobarse, entonces, que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Tema: Determinantes. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es de 9×8, entonces $|\mathbf{A}\mathbf{A}^T| = 0$.

Solución: Como $\mathbf{A}^T$ es de 8×9, entonces tiene, a lo más, ocho posiciones pivote, pero nueve columnas, así que la ecuación $\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene alguna solución no trivial $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^9$, pues hay una variable libre. Otra manera de decir lo mismo, es dándose cuenta de que nueve vectores columna en $\mathbb{R}^8$ siempre es un conjunto linealmente dependiente (teorema 9 de la sección 4.5 del texto guía), así que existe una combinación no trivial de ellas que den el vector nulo.

Puede verse que esa misma solución no trivial, también es solución de $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, pues

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Por el teorema de la matriz invertible, como la matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ de 9×9 tiene una solución no trivial de la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces ella no es invertible (teorema 8 de la sección 2.3) y, en consecuencia, $|\mathbf{A}\mathbf{A}^T| = 0$ (teorema 4 de la sección 3.2).

4) Tema: Matriz de cofactores y matriz adjunta. Encuentre la adjunta de $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y utilícela para dar la inversa de la matriz.

Solución: Sabemos que la inversa de una matriz se relaciona con su adjunta mediante

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{Adj}(\mathbf{A}).$$

Donde $\text{Adj}(\mathbf{A}) = \text{Cof}^T(\mathbf{A})$. Calculemos primero $|\mathbf{A}|$, respecto a la segunda fila (que tiene un cero)

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (12 - 14) - (9 - 12) = -1.$$

Obtengamos la matriz de cofactores. Recordar que el cofactor $c_{i,\,j}$ de la matriz $\mathbf{A}$ es el determinante de la submatriz que queda de eliminar la fila i y la columna j, con el signo correspondiente a su posición, dado por $(-1)^{i+j}$

$$c_{1,\,1} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5. \qquad c_{2,\,1} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -3. \qquad c_{3,\,1} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

$$c_{1,\,2} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2. \qquad c_{2,\,2} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2. \qquad c_{3,\,2} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

$$c_{1,\,3} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4. \qquad c_{2,\,3} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3. \qquad c_{3,\,3} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Con estos valores, construimos

$$\text{Cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \\ -8 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{Adj}(\mathbf{A}) = \text{Cof}^T(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Y, al final,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{Adj}(\mathbf{A}) = -1\begin{pmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

5) Tema: Método de Cramer. Determine los valores del parámetro s para los cuales el sistema $\begin{cases} 3sx_1 - 5x_2 &= 3, \\ 9x_1 + 5sx_2 &= 2, \end{cases}$ tiene única solución y describa la solución.

Solución: Si un sistema tiene única solución, entonces, es soluble mediante el método de Cramer. Tal solución está dada por

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 5s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s & -5 \\ 9 & 5s \end{vmatrix}} = \frac{15s+10}{15s^2+45} = \frac{3s+2}{3(s^2+3)},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3s & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s & -5 \\ 9 & 5s \end{vmatrix}} = \frac{6s-27}{15s^2+45} = \frac{2s-9}{5(s^2+3)}.$$

Para que exista, debe cumplirse $s^2+3 \neq 0$, o sea, $s \notin \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ y, en tal caso, la solución está dada de forma paramétrica como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3s+2}{3(s^2+3)} \\ \frac{2s-9}{5(s^2+3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s^2+3)}\begin{pmatrix} \frac{3s+2}{3} \\ \frac{2s-9}{5} \end{pmatrix}$$

6) Tema: Áreas y volúmenes con determinantes. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal determinada por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

donde a, b, c son números positivos. Sea S la esfera unitaria cuya superficie frontera tiene la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

a) Demuestre que $T(S)$ está acotada por el elipsoide con la ecuación $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{c^2} = 1$.

Solución: Los puntos en la posición $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sobre la frontera de la esfera unitaria, son transformados por T a nuevos puntos $\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$. De manera recíproca, los puntos $\boldsymbol{y}$ son tales que $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{y}$. Es sencillo ver que $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$, por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{a} \\ \frac{y_2}{b} \\ \frac{y_3}{c} \end{pmatrix}.$$

Como los puntos en la frontera cumplen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, los puntos transformados verificarán la relación siguiente:

$$\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{c}\right)^2 = 1,$$

que corresponde a la ecuación de un elipsoide.

b) Con base en el hecho de que el volumen de la esfera unitaria es $\frac{4\pi}{3}$, obtenga el volumen de la región acotada por el elipsoide del inciso a).

Solución: Del teorema 10 de la sección 3.3 del texto guía, sabemos que, si S es nuestra esfera unitaria, y $T(S)$ es el elipsoide, el $\text{Vol}(T(S)) = |\mathbf{A}|\,\text{Vol}(S)$, así,

$$\text{Vol}(T(S)) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \times \frac{4\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Observación: En rigor, el teorema utilizado está enunciado para paralelogramos, pero funciona para cualquier par de lugares geométricos en el espacio relacionados mediante una transformación lineal, como sucedía en este caso.

7) Tema: Espacios y subespacios vectoriales.

a) Sean H y K subespacio de un espacio vectorial V. La intersección $H \cap K$ es el conjunto de vectores $v \in V$ que pertenecen tanto a H como a K. Demuestre que $H \cap K$ es un subespacio de V.

Solución: Debemos mostrar las siguientes tres propiedades: que $H \cap K$ es no vacío (contiene al vector nulo), que $H \cap K$ es cerrada para la suma de vectores y que $H \cap K$ es cerrada para la multiplicación de un vector por un escalar:

i. Como H es subespacio vectorial de V, es no vacío y contiene a 0_V, vector nulo de V. Asimismo, como K es subespacio del mismo espacio V, él también contiene al vector nulo 0_V. Luego, 0_V es un vector que pertenece tanto a H como a K, o sea, $0_V \in H \cap K$. En conclusión, $H \cap K$ es no vacío.

ii. Sean u, v vectores en $H \cap K$. Queremos saber determinar si $u + v \in H \cap K$.

$$\left.\begin{array}{l} u \in H \cap K \\ v \in H \cap K \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{lll} u \in H & \text{y} & u \in K \\ v \in H & \text{y} & u \in K \end{array}\right.$$

$$\implies u + v \in H \quad \text{y} \quad u + v \in K, \quad \text{pues } H \text{ y } K \text{ son subespacios}$$

$$\implies u + v \in H \cap K, \quad \text{por def. de intersección.}$$

Por tanto, $H \cap K$ es cerrada para la suma.

iii. Sea u vector en $H \cap K$ y α un escalar. Queremos saber determinar si $\alpha u \in H \cap K$.

$$u \in H \cap K \implies u \in H \quad \text{y} \quad u \in K$$

$$\implies \alpha u \in H \quad \text{y} \quad \alpha u \in K, \quad \text{pues } H \text{ y } K \text{ son subespacios}$$

$$\implies \alpha u \in H \cap K, \quad \text{por def. de intersección.}$$

Por tanto, $H \cap K$ es cerrada para la multiplicación por escalar.

b) Sea S el conjunto de los pares ordenados (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 1$. Determine si S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

i. Ciertamente $(0, 0) \in S$ pues $0^2 + 0^2 \leq 1$. $(S \neq \emptyset)$.

ii. $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son elementos de S, no obstante, $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \neq S$ pues $1^2 + 1^2 > 1$.

Por tanto, S no es subespacio pues no es cerrado para la suma. Verificar que tampoco se cumple la tercera propiedad.

8) Tema: Espacio nulo, espacio columna y espacio fila. Halle una base para el espacio columna, una base para el espacio fila y una base para el espacio nulo de la matriz

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ 10 & -8 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Llevamos la matriz a su forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ 10 & -8 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí, aquellas filas no nulas, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, conforman una base para Fil($\mathbf{A}$).

Una base para el espacio nulo de $\mathbf{A}$ puede determinarse con la solución general de la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, que tiene las mismas soluciones que $\mathbf{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{A}'$ es la forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego, una base para Nul($\mathbf{A}$) es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Por último, una base para Col($\mathbf{A}$) está dada por las columnas de $\mathbf{A}$ (la original) que son columnas pivote en la reducida. En este caso, vemos que tienen posiciones pivote la primera, la segunda y la cuarta columnas, por lo tanto, una base es $\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

9) **Tema: Transformaciones lineales, núcleo e imagen.** Determine una base para el núcleo (espacio nulo) e imagen de la transformación lineal

$$T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(ax^2 + bx + c) = (a - c,\, b + c)$$

Solución: Para el núcleo o espacio nulo de la transformación, denotado por $\ker(T)$,

$$\begin{aligned} p(x) = ax^2 + bx + c \in \ker(T) &\iff T(ax^2 + bx + c) = (a - c,\, b + c) = (0,\, 0) \\ &\iff a = c,\, b = -c,\, c \in \mathbb{R} \\ &\implies p(x) = cx^2 - cx + c = c(x^2 - x + 1),\, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Así, los elementos del núcleo de T son generados por el conjunto $\{x^2 - x + 1\}$, el cual es linealmente independiente por estar constituido por un solo elemento no nulo. Entonces, $\{x^2 - x + 1\}$ es base para $\ker(T)$.

Para la imagen o rango de la transformación, denotado por $\text{im}(T)$, dado que $\{1,\, x,\, x^2\}$ es una base de $\mathscr{P}_2(R)$,

$$\text{im}(T) = \text{gen}\{T(1),\, T(x),\, T(x^2)\} = \text{gen}\{(-1,\, 1),\, (0,\, 1),\, (1,\, 0)\} = \text{gen}\{(0,\, 1),\, (1,\, 0)\} = \mathbb{R}^2.$$

Es decir, el espacio imagen de la transformación es todo $\mathbb{R}^2$ y una base es simplemente $\{(0,\, 1),\, (1,\, 0)\}$.