Apuntes de Álgebra Lineal

Carolina B. Becerra O.

Marzo 2021

Índice general

1. Vectores en $\mathbb{R}^n$ **7**

2. Sistema de ecuaciones **19**

3. Matrices **29**

4. Aplicaciones de Matrices **41**

5. Determinantes **49**

6. Espacios vectoriales y Transformaciones lineales **55**

7. Valores y vectores propios **69**

8. Ortogonalidad **83**

9. Matrices Simétricas **93**

Resumen

En matemáticas se suele estudiar objetos (en este curso R^n) y funciones entre ellos (en este curso matrices).

1. La primera parte del curso estudia el conjunto R^n (vectores, dependencia lineal, conjunto generado). También se da una pincelada de espacios vectoriales en que se generaliza este conjunto.

2. La segunda parte del curso estudia las matrices. También se da una pincelada de transformaciones lineales en que se generalizan estas funciones. Una manera de hacer este estudio es lo usual en matemticas: clasificando.

   - Las matrices no necesariamente cuadradas se clasifican según si son inyectivas y/o sobreyectivas. Siempre se pueden descomponer en la descomposicin en valores singulares y las inyectivas en QR.
   - Las matrices cuadradas:
     - Primero se clasifican las matrices en invertibles y no invertibles. Una buena manera de hacer eso es mediante determinantes.
       Si nos quedamos con las invertibles conviene caracterizarlas mediante producto de las invertibles ms simples que existen (elementales) en el mismo sentido en que se caracterizan los números enteros como producto de números primos o los polinomios en producto de irreducibles. Esta caracterización sustenta la aplicación de la descomposición $PA = LU$.
     - Una segunda clasificación matricial tiene que ver con las descomposiciones y sus usos.

a) Las simétricas son siempre diagonalizables. En particular se pueden escribir como combinación lineal de matrices de proyección de rango 1 usando descomposición espectral.

b) Las no simétricas pueden ser diagonalizables o no, si no lo son, se usa la forma canónica de jordan (lamentablemente esto no es parte del curso).

Capítulo 1

Vectores en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo estudiaremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ y algunas características de algunos subconjuntos de él.

Definición 1.1. El conjunto de n tuplas ordenadas de números reales se denota por $\mathbb{R}^n$ y a sus elementos se les llama vectores.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ tal que } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

A $x_1, \ldots, x_n$ se les llama componentes o coordenadas del vector v. Al vector cuyas componentes son todas 0 se le llama vector nulo o vector cero, y se denota por $\overrightarrow{0}$.

Definición 1.2. Vectores canónicos:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \ , \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

Ejemplo 1.3. Se observa que la notación es la misma, por lo tanto a veces es importante especificar el conjunto al que pertenece el vector canónico:

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ y } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Y también el vector cero:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ y } \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Además se observa que para que dos vectores sean iguales deben tener las mismas coordenadas y en el mismo orden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definición 1.4. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ la suma de u y v, denotada por $u+v$ es el vector cuyas componentes son la suma de las respectivas componentes de u y v. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, la ponderación de u por el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ es el vector cuyas componentes son el producto de α por las respectivas componentes de u. Es decir:

Si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, entonces $u + v = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$, $\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.5. Si $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$2u - \frac{1}{2}v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.6. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces las operaciones anteriores satisfacen:

1. $u + v \in \mathbb{R}^n$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. $u + v = v + u$.
4. $u + \overrightarrow{0} = u$.
5. $u + (-u) = \overrightarrow{0}$.
6. $\alpha u \in \mathbb{R}^n$.
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
9. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.
10. $1\ u = u$.

Observación 1.7. En la proposición anterior hay que notar que la igualdad $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ contiene el símbolo + para la suma de números reales y para la suma de vectores.

Observación 1.8. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^n$. $\alpha u = \vec{0}$ si y sólo si $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}$, entonces por definición de las operaciones se tiene $\alpha u = \vec{0}$.

Si $\alpha u = \vec{0}$, supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{\alpha}\alpha u = \dfrac{1}{\alpha}\vec{0} = \vec{0}$.

□

Definición 1.9. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, el producto punto de u y v, denotado por $u \cdot v$, es la suma de los respectivos productos entre coordenadas. Es decir

Si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, entonces $u \cdot v = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.

Ejemplo 1.10. Por ejemplo si $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, entonces $u \cdot v = 3$.

Proposición 1.11. Sea $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el producto punto satisface:

1. $u \cdot v \in \mathbb{R}$.
2. $u \cdot \vec{0} = 0$.
3. $u \cdot v = v \cdot u$.
4. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.
5. $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v$.
6. $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \leftrightarrow u = \vec{0}$.

Demostración:

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} u \cdot u = 0 &\leftrightarrow x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ &\leftrightarrow x_1^2 = \cdots = x_n^2 = 0 \\ &\leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \\ &\leftrightarrow u = \vec{0}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.12. $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 1.13. Norma de un vector: Dado $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = \sqrt{u \cdot u}$.

Definición 1.14. Vector unitario: vector que tiene norma 1.

Ejemplo 1.15. El vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es tal que $\|u\| = \sqrt{6}$ y no es unitario.

El vector $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ es tal que $\|v\| = 1$ y es unitario.

Definición 1.16. Distancia entre vectores: $d(u, v) = \|u - v\|$.

Ejemplo 1.17. $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1 \dots n$.

$d(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \sqrt{2} & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Proposición 1.18. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$. Entonces

- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.
- $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$.
- $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$.
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Demostración:

- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

  Si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, entonces $\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$.

  Luego $\|\alpha u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha {x_i}^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = |\alpha| \|u\|$.

- $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$.

  Usando las propiedades del producto punto se tiene que:

  $\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u\cdot v$.

- $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$.

  Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que:

  $0 \leq \|\alpha u + v\|^2 = \alpha^2\|u\|^2 + \alpha 2u \cdot v + \|v\|^2$.

  Entonces el discriminante de esta expresión cuadrática es menor o igual a cero:

  $(2u \cdot v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$.

  Luego $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$.

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|u \cdot v|$.

  Pero $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$, entonces:

  $\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$.

□

Definición 1.19. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. El ángulo θ entre dos vectores es tal que: $\cos(\theta) = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

Ejemplo 1.20. $\theta(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \pi/2 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 1.21. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_m$ es el vector

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m,$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.22. El vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ porque $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Definición 1.23. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto generado por S, denotado por $\operatorname{Gen} S$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S.

Si $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$, entonces

$$\operatorname{Gen} S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m \,/\, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 1.24. El vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ pertenece a $\operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$.

Ejemplo 1.25. $\operatorname{Gen}\{e_1, \ldots e_n\} = \mathbb{R}^n$.

Proposición 1.26. Sea $S = \{v_1, \cdots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

- $\vec{0} \in \operatorname{Gen} S$.
- $S \subset \operatorname{Gen} S$.
- $\operatorname{Gen} S$ es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalar.

Demostración:

- $\vec{0} \in \operatorname{Gen} S$.
  $\vec{0} = 0v_1 + \cdots + 0v_m$.
- $S \subset \operatorname{Gen} S$. Basta considerar que para todo $j = 1, \cdots, m$:
  $v_j = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_m$.

- $\operatorname{Gen} S$ es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalar.

  Sean $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in \operatorname{Gen} S$, $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m \in \operatorname{Gen} S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u + \lambda w &= (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) + \lambda(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m) \\ &= (\alpha_1 + \lambda\beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_m + \lambda\beta_m)v_m. \end{aligned}$$

- $\operatorname{Gen}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$.

  Se considera

  $\{\alpha\vec{0} \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\}$.

□

Observación 1.27. $\operatorname{Gen}\phi = \operatorname{Gen}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$.

Teorema 1.28. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si v_1 es combinación lineal de $v_2, \ldots, v_m$, entonces

$$\operatorname{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \operatorname{Gen}\{v_2, \ldots, v_m\}$$

Demostración: Si $w = \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_m v_m \in \operatorname{Gen}\{v_2, \ldots, v_m\}$, entonces $w = 0v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_m v_m \in \operatorname{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Si $u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots \beta_m v_m \in \operatorname{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ y $v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$, entonces

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots \beta_m v_m \\ &= \beta_1(\lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m) + \beta_2 v_2 + \cdots \beta_m v_m \\ &= (\beta_1\lambda_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\beta_1\lambda_m + \beta_m)v_m. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.29. $\operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

Definición 1.30. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- S es **linealmente dependiente** (LD) si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos nulos tal que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$. (se puede construir al vector cero de manera no trivial).

- S es **linealmente independiente** (LI) si no es LD, es decir si para cualquier combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$, se tiene necesariamente que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. (la única manera de construir al vector cero es la trivial).

Ejemplo 1.31.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Observación 1.32. Si $S = \{\vec{0}, v_2, \cdots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces
$\vec{0} = 1\vec{0} + 0v_2 + \cdots + 0v_m$, luego S es L.D.

Proposición 1.33. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces S es LD si y sólo si existe un vector de S que es combinación lineal del resto de los vectores de S.

Demostración:

- Si $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es L.D.,entonces existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \vec{0}$. Sin perder generalidad, si $\alpha_1 \neq 0$, entonces
  $v_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \dfrac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$.

- Si existe un vector en $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ que es combinación del resto, sea v_1 (sin perder generalidad). Entonces existen $\beta_2, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_m v_m$, entonces
  $\vec{0} = v_1 = -\beta_2 v_2 - \cdots - \beta_m v_m$.

□

Definición 1.34. Recta en $\mathbb{R}^2$. Sea $d \in \mathbb{R}^2$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.35. Recta en $\mathbb{R}^3$. Sea $d \in \mathbb{R}^3$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.36. Recta en $\mathbb{R}^n$. Sea $d \in \mathbb{R}^n$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.37. Plano en $\mathbb{R}^3$. Sea $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n$ L.I, $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x = u + \alpha d_1 + \beta d_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que Π pasa por el origen.

Ejemplo 1.38.

- La recta $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ tiene ecuación $x_2 = 3x_1 + 1$.

- La recta de ecuación $x_2 = 7$ es el conjunto
  $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

- La recta de ecuación $x_1 = -3$ es el conjunto
  $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

- La recta de ecuación $y = 3x + 5$ se puede escribir como

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- La recta de ecuación $y = 7$ se puede escribir como

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- La recta de ecuación $x = 4$ se puede escribir como

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- El plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ es el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

- El plano de ecuación $x + y - 2z = 5$ se puede escribir como

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Definición 1.39. Sean $u \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$. El hiperplano definido por u y b es $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = b\}$. Si $b = 0$, se dice que pasa por el origen.

Ejemplo 1.40. En $\mathbb{R}^4$ sea $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \text{ tal que } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

$$x \in H \leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$x \in H \leftrightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto $H = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

Observación 1.41. Todo hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el origen es un conjunto generado por $(n-1)$ vectores L.I. Todo hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es la suma de un vector posición y un conjunto generado por $(n-1)$ vectores L.I. Todo hiperplano en $\mathbb{R}^3$ es un plano en $\mathbb{R}^3$.

Demostración:

□

Observación 1.42. Problema importante: ¿ Todo plano en $\mathbb{R}^3$ es un hiperplano?

Observación 1.43. Problema importante: Dado un conjunto S y un vector b en $\mathbb{R}^n$. ¿$b \in \text{Gen}\, S$?

Capítulo 2

Sistema de ecuaciones

Definición 2.1. Una matriz es un arreglo ordenado de m vectores de $\mathbb{R}^n$. Notación: $A = [v_1\ v_2\ \dots\ v_m]$. Se dice que A es una matriz de $n \times m$, donde m es el número de columnas y n es el número de filas.
Si $v_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ para $j = 1, \dots, m$, entonces $A = (a_{i,j})$, donde $a_{i,j}$ son los coeficientes o entradas de la matriz.

Ejemplo 2.2. Construya una matriz de 3×4 tal que sus entradas $a_{i,j} = i^2+j$.

Definición 2.3. Matriz nula es tal que todos sus coeficientes son 0.

Definición 2.4. Matriz cuadrada es tal que $n = m$.

Definición 2.5. Matriz identidad es una matriz cuadrada denotada por I tal que $I = [e_1\ \dots\ e_n]$.

Ejemplo 2.6.

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz nula de 2×3.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz identidad de 2×2.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz identidad de 3×3.

Definición 2.7. Dada $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]$ de $n \times m$ y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, el producto de A por x es $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_mv_m \ \in \mathbb{R}^n$.

El producto de una matriz con un vector es la combinación lineal de las columnas de la matriz usando las coordenadas del vector.

Ejemplo 2.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$7 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 \\ 54 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

Proposición 2.9. Sea $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]$ de $n \times m$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(x + y) = Ax + Ay$.
- $A(\alpha x) = \alpha Ax$.
- $A\vec{0} = \vec{0}$.

Demostración: Sea $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]$ $x =, y =$, entonces

- $$\begin{aligned} A(x+y) &= [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_m+y_m \end{pmatrix} \\ &= (x_1+y_1)v_1+(x_2+y_2)v_2+\ldots+(x_m+y_m)v_m \\ &= (x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_mv_m)+(x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_mv_m) \\ &= Ax+Ay \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} A(\alpha x) &= [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_mv_m) \\ &= \alpha(Ax) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} A(\vec{0}) &= [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0v_1+0v_2+\ldots+0v_m \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

□

Observación 2.10. Todo sistema de ecuaciones lineales se puede escribir de la forma matricial $Ax = b$. Por ejemplo

$$\begin{array}{rcl|} 2x+y-3z &=& 4 \\ 7x+8z &=& 6 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad x\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Definición 2.11. Un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es tal que A es una matriz de $n \times m$ asociada al sistema, $b \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^m$. $[A\ b]$ es la matriz ampliada del sistema.
El sistema es homogéneo si $b = \overrightarrow{0}$ y no homogéneo si $b \neq \overrightarrow{0}$. El sistema es consistente si tiene solución e inconsistente si no tiene solución.

Definición 2.12. Una matriz se dice que está en la forma escalonada (F.E.) si:

1. $a_{1,1} \neq 0$.
2. Si el pivote de la fila i está en la columna j, entonces el pivote de la fila $i+1$ está en la columna k, tal que $j < k$. (Pivote: primer elemento distinto de 0 de la fila).
3. Las filas nulas están al final de la matriz.

Definición 2.13. Una matriz se dice que está en la forma escalonada reducida (F.E.R.) si:

1. Está es la F.E.
2. Todos los pivotes son iguales a 1.
3. Los vectores columna que contienen pivotes son canónicos.

Ejemplo 2.14.

- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ está en F.E.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ está en F.E.R.

Definición 2.15. Dada una matriz, las operaciones fila son:

1. Tipo I: Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
2. Tipo II: Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $F_i \to \lambda F_i$.
3. Tipo III: (pivotear) Sumar a una fila, un múltiplo escalar de otra: $F_i \to F_i + \lambda F_j$.

Ejemplo 2.16.

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

Observación 2.17. Para solucionar un sistema de ecuaciones se lleva la matriz ampliada a su F.E. o a su F.E.R., usando operaciones fila, luego se reinterpreta el sistema y se resuelve recursivamente hacia arriba. Si el sistema es consistente, a las variables que quedan en posiciones no pivotes se les llama variables libres.

Ejemplo 2.18. Dado el sistema

$$\begin{array}{rcl} x+y+5z & = & 9 \\ \hline 2x+y+7z & = & 13 \end{array}$$

Se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Entonces la solución es:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observación 2.19. Lo anterior funciona pues si $[A|b] \sim [A'|b']$, entonces $Ax = b \leftrightarrow A'x = b'$.

Teorema 2.20. Sea el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con A de $n \times m$, y M la F.E.R. de la matriz $M = [A\ b]$.

Para $b \neq \vec{0}$, el sistema

- es inconsistente si y sólo si M tiene una fila de la forma $[0 \dots 0\ c]$ con $c \neq 0$,
- es consistente y tiene solución única si y sólo si M tiene m pivotes,

- es consistente y tiene infinitas soluciones si y sólo si M tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Para $b = \overrightarrow{0}$ el sistema es consistente ($\overrightarrow{0}$ es solución) y

- tiene solución única si y sólo si F.E. de A tiene m pivotes,
- tiene infinitas soluciones si y sólo si F.E. de A tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Ejemplo 2.21. Casos:

- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$
- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$
- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Definición 2.22. Rango de un sistema: número de pivotes de la forma escalonada de la matriz asociada del sistema. Rango de una matriz: número de pivotes de la forma escalonada del sistema homogéneo asociado a la matriz.

Teorema 2.23. Sea el sistema $Ax = b$, u tal que $Au = b$ y los conjuntos $C_1 = \{x : Ax = b\}$ y $C_2 = \{y : Ay = \vec{0}\}$. Entonces $x \in C_1$ si y sólo si $x - u \in C_2$.

DEMOSTRACIÓN: Se tiene:

$$\begin{aligned} x \in C_1 &\leftrightarrow Ax = b \\ &\leftrightarrow Ax = Au \\ &\leftrightarrow Ax - Au = \vec{0} \\ &\leftrightarrow A(x-u) = \vec{0} \\ &\leftrightarrow x - u \in C_2 \end{aligned}$$

□

Proposición 2.24. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y $A = [v_1 \ldots v_m]$. S es L.I. si y sólo si el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene solución única.

Ejemplo 2.25. El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es L.I. y el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} x = \vec{0}$ tiene solución única.

Proposición 2.26. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y A una matriz cuyas filas son los vectores del conjunto S. S es L.I. si y sólo si la F.E.R. de la matriz A no tiene filas nulas.

DEMOSTRACIÓN: S es L.D. si y sólo si existe un vector que es cominación lineal del resto si y sólo si una fila de la matriz A es combinación lineal del resto de las filas.

Sin perder generalidad (o bien haciendo operaciones de intercambio de filas si es necesario), la primera fila de la matriz A es combinación lineal del resto de las filas si y sólo si existen $\alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$.

Haciendo las operaciones del tipo III que correspondan, si y sólo si la F.E.R. de la matriz A tiene filas nulas.

□

Teorema 2.27. Sea $v_1, \ldots, v_m$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Si $m > n$, entonces $v_1, \ldots, v_m$ es L.D.

DEMOSTRACIÓN:
Al resolver el sistema $[v_1 \ldots v_m]x = \vec{0}$, la forma escalonada reducida tiene variables libres.

□

Ejemplo 2.28. El conjunto $\{u, v, w\}$ en $\mathbb{R}^2$ es L.D.

Observación 2.29. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$, $A = [v_1 \ldots v_m]$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces $b \in \text{Gen}\{v_1, \ldots, v_m\}$ si y sólo si el sistema $Ax = b$ es consistente.

Observación 2.30. Sea A de $n \times m$ y $b_1, \ldots b_r \in \mathbb{R}^n$, para resolver $Ax = b_1, Ax = b_2, \ldots, Ax = b_r$ se escalona una única matriz $[A \ b_1 \ b_2 \ldots b_r]$ y se interpreta la solución para cada sistema por separado.

Ejemplo 2.31. $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] x = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ se resuelven escalonando:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right]$$

Observación 2.32. Para buscar la intersección de n hiperplanos, se resuelve el sistema asociado a las n ecuaciones.

Ejemplo 2.33.

1. Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^7$ y $M = [v_1 \ \ v_2 \ \ v_3 \ \ v_4]$.
   Si $M(2e_1 - e_3 + e_4) = \vec{0}$, ¿cuál es el mínimo de filas nulas que tiene la F.E.R. de M? Justifique.

2. Determine un sistema de ecuaciones $Ax = \overrightarrow{0}$ tal que su conjunto solución sea: $\text{Gen}\{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

3. Determine un sistema de ecuaciones $Ax = b$ tal que su conjunto solución sea: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Gen}\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

4. Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudie la consistencia del siguiente sistema. En los casos en que exista solución, encuéntrelas.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 & = & a \end{array}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a & 3 \\ 0 & -1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto si $a = 3$, el sitema no tiene solución.

Si $a \neq 3$, entonces

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & a(5-a) \end{bmatrix}$$

Luego, si $a \neq 0$ y $a \neq 5$ el sistema no tiene solución.

Si $a = 0$ la solución es única: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -2$.

Si $a = 5$ la solución es única: $x_1 = 9$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 3$.

5. Demuestre que si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones distintas, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones.

   Solución:

   Sea u y v vectores distintos tales que solucionan el sistema $Ax = b$.

   Entonces basta tomar cualquier vector de la forma: $x = u + \alpha(u - v)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y se tiene que:

   $Ax = A(u + \alpha(u - v)) = Au + \alpha(Au - Av) = b + \alpha(b - b) = b.$

6. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ y $Ax = b$ un sistema de ecuaciones tal que la forma escalonada reducida de $[A \mid b]$ es la matriz,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right]$$

   Determine si existen valores de p y de q para que:

   a) el sistema no tenga solución,

   b) el sistema tenga solución única y en tal caso encuéntrela,

   c) el sistema tenga infinitas soluciones y en tal caso encuéntrelas,

   d) columnas de A sean L.I.,

   e) filas de A sean L.I.

Capítulo 3

Matrices

Definición 3.1. $M_{n,m}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de $n \times m$ con coeficientes reales.

Definición 3.2. Sean $A = [v_1 \ \dots \ v_m], B = [u_1 \ \dots \ u_m] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. La operaciones suma y multiplicación por escalar de matrices se definen por $A + B = [v_1 + u_1 \ \dots \ v_m + u_m]$, $\alpha A = [\alpha v_1 \ \dots \ \alpha v_m]$.

Observación 3.3. $-1 \cdot A = -A$.

Proposición 3.4. Sean $A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A + B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + B = B + A$.
- $A + 0 = A$.
- $A + (-A) = 0$.
- $\alpha A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- $1 \ A = A$.

Definición 3.5. Sea A de $n \times m$ y B de $m \times p$, tal que $B = [u_1 \ \dots \ u_p]$, el producto de A por B es la matriz $A \cdot B = [A \cdot u_1 \ \dots \ A \cdot u_p]$ de $n \times p$.

Ejemplo 3.6. Por la definición:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} a+2c \\ d+2f \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ d+e+f \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} b+c \\ e+f \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 3a+4b+5c \\ 3d+4e+5f \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & 2a+b+c & b+c & 3a+4b+5c \\ d+2f & d+e+f & e+f & 3d+4e+5f \end{bmatrix}$$

Entonces numéricamente, es importante ver que el producto de matrices es el cálculo de productos puntos entre las filas de la matriz de la izquierda y las columnas de la matriz de la derecha.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 5 \\ 11 & 12 & 6 & 37 \end{bmatrix}$$

Proposición 3.7. Sean A, B, C matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(BC) = (AB)C$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.

- $IA = AI = A$.
- $0A = A0 = 0$.

Demostración:

- $A(BC) = (AB)C$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $IA = AI = A$:

$$\begin{aligned} AI &= [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m][e_1\ e_2\ \ldots\ e_m] \\ &= [[v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]e_1\ \ldots\ [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]e_m] \\ &= [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m] \\ &= A \end{aligned}$$

- $0A = A0 = 0$.

□

Observación 3.8. En general el producto de matrices no es conmutativo.
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BA$.

Definición 3.9. Sea A de $n \times m$, la transpuesta de A denotada por A^T es de $m \times n$ y es la matriz que resulta de intercambiar las filas de A por las columnas de la A.

Ejemplo 3.10. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Proposición 3.11. Sean A, B matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(A^T)^T = A$.
- $\alpha(A^T) = (\alpha A)^T$.
- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Demostración:

- $(A^T)^T = A$.
- $\alpha(A^T) = (\alpha A)^T$.
- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

  Sea $A = \begin{bmatrix} f_1^T \\ \vdots \\ f_n^T \end{bmatrix}$ descrita por filas, es decir los vectores f_i^T son vectores fila. Sea $B = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ descrita por columnas.

  $$(AB)^T = (f_i^T v_j)^T = (f_i \cdot v_j)^T = (v_j \cdot f_i)^T = (v_i \cdot f_j) = (v_i^T f_j) = B^T A^T.$$

□

Definición 3.12. Sea $A = (a_{i,j})$ de $n \times n$.

- A es triangular superior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i > j$.
- A es triangular inferior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i < j$.
- A es diagonal si $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.
- A es simétrica si $A = A^T$.
- A es antisimétrica si $A = -A^T$.

Ejemplo 3.13.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ es triangular superior.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ es triangular superior.
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es triangular inferior.
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es diagonal.
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ es simétrica.
- $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ -5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ es antisimétrica.

Definición 3.14. Sea A una matriz de $n \times m$, se define una función $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$T_A(x) = Ax$$

Ejemplo 3.15. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Observación 3.16. El dominio de esta función es $\mathbb{R}^m$. La imagen de $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ es $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 3.17. Sea A una matriz de $n \times m$, la función T_A se dice que es lineal pues para $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $T_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$,
- $T_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha T_A(x)$.

Ejemplo 3.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $T_A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Observación 3.19. En adelante la función T_A se denotará por A.

Definición 3.20. Sea A de $n \times m$.

- $\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = \overrightarrow{0}\}$. Es el conjunto de pre-imágenes del vector cero. Es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$.

- $\text{Im}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\}$. Es el recorrido de la función dada por la matriz A. Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consitente. Es el conjunto generado por las columnas de la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- $C(A)$ es el conjunto generado por las columnas de la matriz A. Es el recorrido de la función dada por la matriz A. Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consistente. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. (Está generado por las columnas de la matriz que en su forma escalonada están en las posiciones pivotes).

- $F(A)$ es el conjunto generado por las filas de la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. (Está generado por las filas no nulas de la forma escalonada de la matriz).

Ejemplo 3.21. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Su forma escalonada reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Entonces:

$$\text{Nul}(A) = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\text{Im}(A) = C(A) = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$F(A) = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observación 3.22. $\text{Im}(A) = C(A) = F(A^T)$.

Teorema 3.23. Sea A de $n \times m$. Entonces

- A es 1-1 (inyectiva) si y sólo si $\text{Nul}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.
- A es sobreyectiva si y sólo si $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN:

- A es 1-1 (inyectiva) si y sólo si $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$:

  Si A es inyectiva, entonces todos los vectores en el recorrido tienen sólo una preimagen, en particular el vector cero, entoncesNul$(A) = \{\vec{0}\}$.

  Si $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$ y $Au = Av$, entonces $A(u - v) = \vec{0}$, Luego $(u - v) \in \text{Nul}(A)$. Pero Nul$(A)$ sólo contiene al $\vec{0}$. Entonces $u = v$ y A es inyectiva.

- A es sobreyectiva si y sólo si $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

  Por definición, A es sobre si y sólo si su recorrido es igual al conjunto de llagada.

□

Ejemplo 3.24. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Su forma escalonada reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Entonces:

A define una función $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\text{Nul}(A) = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\text{Im}(A) = C(A) = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right\}.$$

No es inyectiva y no es sobre.

Teorema 3.25. Sea A de $n \times m$. Entonces

Filas de A son L.D.
$\leftrightarrow$ Existe una fila que es combinación lineal del resto.
$\leftrightarrow$ $f_n = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1}$ (sin perder generalidad)
$\leftrightarrow$ La FER de A tiene por lo menos una fila nula (haciendo las operaciones del tipo III necesarias).

Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ La F.E.R. de A tiene no tiene filas nulas.
$\leftrightarrow$ Todas las filas de la F.E.R. de A contienen pivotes.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

A es 1-1
$\leftrightarrow$ $\text{Nul}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.
$\leftrightarrow$ $Ax = \overrightarrow{0}$ tiene solución única.
$\leftrightarrow$ Columnas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es m.

A es sobre
$\leftrightarrow$ $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
$\leftrightarrow$ $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
$\leftrightarrow$ $Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
$\leftrightarrow$ La FER de $[A\ e_1\ \ldots e_n]$ no tiene filas de la forma $[0 \ldots 0\ u]$ con u un vector no nulo.
$\leftrightarrow$ Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

Definición 3.26. A de $n \times n$ se dice invertible si existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = I$.

Teorema 3.27. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

A es invertible.
$\leftrightarrow$ Existe B tal que $AB = I$.
$\leftrightarrow$ Existen $u_1, \ldots, u_n$ tal que $A[u_1 \ldots u_n] = [e_1 \ldots e_n]$.
$\leftrightarrow$ $Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
$\leftrightarrow$ A es sobre.
$\leftrightarrow$ Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.
$\leftrightarrow$ Existe B tal que $BA = I$.
$\leftrightarrow$ $Ax = \vec{0}$ tiene solución única.
$\leftrightarrow$ A es inyectiva.
$\leftrightarrow$ Columnas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

Observación 3.28. Si A es invertible, entonces de la definición es sobreyectiva. Luego es inyectiva y A^T sobreyectiva, entonces existe C tal que $A^T C^T = I$, luego $CA = I$. Multiplicando por B se tiene $B = C$. Como las columnas de B solucionan los sistemas $Ax = e_i$, entonces son ńicas y B es única.

A esta matriz única se le llama inversa de A y se denota A^{-1}. Para calcularla se resuelven los sistemas $Ax = e_i$ en un único proceso de resolución de sistemas.

Ejemplo 3.29. Para calcular la inversa de $\left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{array}\right]$ el proceso es:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Por lo tanto la inversa es $\left[\begin{array}{cc} 7/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$

Proposición 3.30. Sean A y B de $n \times n$. Entonces

- A es invertible si y sólo si $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
- Si A es invertible, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A es invertible si y sólo si A^T es invertible. En este caso $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Si A es invertible y $\alpha \neq 0$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces para todo $r \in \mathbb{N}$, A^r es invertible y se tiene $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r = A^{-r}$.
- Si AB es invertible, entonces A y B son invertibles.
- Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración:

- A es invertible si y sólo si $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$:

  Como A es sobre el sistema tiene solución, como A es inyectiva la solución es única.
- Si A es invertible, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A es invertible si y sólo si A^T es invertible. En este caso $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$:

  Si A es invertible el rango es n y el de A^T también.
- Si A es invertible y $\alpha \neq 0$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces para todo $r \in \mathbb{N}$, A^r es invertible y se tiene $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r = A^{-r}$.
- Si AB es invertible, entonces A y B son invertibles:

  Si AB es invertible, entonces existe C tal que $ABC = I$, entonces A es invertible. Y como también $CAB = I$, entonces B es invertible.
- Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

Observación 3.31. Sean $A_1, \ldots, A_k$ matrices cuadradas e invertibles. Entonces $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = (A_k)^{-1} \cdot \ldots \cdot (A_1)^{-1}$.

Esto es cierto usando la proposición anterior.

Proposición 3.32. Sean A, B, C, D matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas. Entonces

- Si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $BA = CA$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $AB = BA$, entonces $BA^{-1} = A^{-1}B$.
- Si A es invertible, puede ocurrir que $A^{-1}BA \neq B$.
- Si A y B son invertibles, y $ACB = D$, entonces $C = A^{-1}DB^{-1}$.

Demostración:

□

Ejemplo 3.33. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Observación 3.34. Una matriz diagonal es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos. Esto es cierto porque la forma escalonada reducida debe tener pivotes en cada fila.

Observación 3.35. Una matriz triangular superior (o inferior) es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Ejemplo 3.36. Finales

1. Productos notables: observar que en general $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.
2. Estudiar invertibilidad de $u^T u$ y uu^T.
3. Sea A, B de $n \times 1$ tal que $1 - A^T B \neq 0$. Demuestre que

$$(I - AB^T)^{-1} = I + \frac{1}{(1 - A^T B)} AB^T.$$

4. La triangularidad se mantiene en el producto y al tomar inversas.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Demuestre que A es no singular si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

6. Sea A una matriz 1-1 de $n \times m$. Demuestre que si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es L.I., entonces $\{Av_1, \ldots, Av_r\}$ es L.I.

7. Sea $A = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6]$ una matriz de 4×6, tal que su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

   a) Determine un conjunto generador de vectores L.I. para $C(A)$.

   b) Determine el Nul(A).

   c) Determine si $\{v_1, v_2, v_4\}$ es L.I. o L.D.

8. Sea A de 3×4 tal que la F.E.R. de $[A \mid I]$ es

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

   Sin calcular A ni A^T:

   a) Determine el Nul(A).

   b) Determine el Nul(A^T).

   c) Determine la solución general de $A^T x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   d) Sea A una matriz $1-1$ de $n \times 3$. Demuestre que la imagen por A del hiperplano $x_2 = 0$ es un conjunto generado por dos vectores L.I.

Capítulo 4

Aplicaciones de Matrices

Definición 4.1. E_I (E_{II}, E_{III}) es una matriz elemental del tipo I (II, III), si es la matriz que resulta de hacer una operación elemental del tipo I (II, III) a la matriz identidad. Se dice que la matriz E representa dicha operación elemental.

Ejemplo 4.2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observación 4.3.

tipo	matriz	operación	transpuesta	operación	inversa	operación
I	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$
II	E_{II}	$F_i \to \lambda F_i$	E_{II}	$F_i \to \lambda F_i$	$\widetilde{E_{II}}$	$F_i \to 1/\lambda F_i$
III	E_{III}	$F_i \to F_i + \alpha F_j$	$\widetilde{E_{III}}$	$F_j \to F_j + \alpha F_i$	$\widetilde{\widetilde{E_{III}}}$	$F_i \to F_i - \alpha F_j$

Ejemplo 4.4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Observación 4.5. Si A es de $n \times m$ y B es la matriz de $n \times m$ que resulta de hacerle a A una operación elemental, entonces $EA = B$, donde E es la matriz que representa dicha operación elemental.

Ejemplo 4.6.

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

Proposición 4.7. Si A es de $n \times m$ y $B =$ F.E. de A, entonces $E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 A = B$, donde E_i son las matrices elementales que representan las operaciones elementales que llevan la matriz A en la matriz B.

Demostración:

□

Ejemplo 4.8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

Teorema 4.9. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si A se puede escribir como producto de matrices elementales.

Ejemplo 4.10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Observación 4.11. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si F.E.R de A es la matriz identidad

Teorema 4.12. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A, tal que U se obtiene sin necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible, tal que

$$A = LU$$

Consideraremos a la matriz L siempre con $1's$ en la diagonal.

Demostración:

□

Ejemplo 4.13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 4.14. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A, tal que U se obtiene con la necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible y P una matriz producto de elementales del tipi I, tal que

$$PA = LU$$

Demostración:

□

Ejemplo 4.15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Observación 4.16. Si $A = LU$, para resolver $Ax = b$ se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Ejemplo 4.17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

Observación 4.18. Si $PA = LU$, para resolver $Ax = b$ se multiplica el sistema por P y luego se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Ejemplo 4.19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Definición 4.20. Si A es de $n \times n$ simétrica, la forma cuadrática asociada a A es la función $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$q_A(v) = v^T A v$$

Ejemplo 4.21.

- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, entonces $q = x^2 + 6y^2 + 8z^2 + 4xy + 2xz$

- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, entonces $q = x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy$

Definición 4.22. Una matriz (o su forma cuadrática asociada) se dice:

- definida positiva si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) > 0$.
- definida negativa si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) < 0$.
- semidefinida positiva si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) \geq 0$.
- semidefinida negativa si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) \leq 0$.

Ejemplo 4.23.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ es positiva definida.
- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ no se puede clasificar.

Observación 4.24. Si D es diagonal, con elementos $d_1, \ldots, d_n$ en su diagonal, entonces D (o q_D) es

- definida positiva si $d_i > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- definida negativa si $d_i < 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- semidefinida positiva si $d_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- semidefinida negativa si $d_i \leq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 4.25. Clasificación de:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Teorema 4.26. Sea $A = A^T$. Si $A = LU$, entonces existe D diagonal tal que $A = LDL^T$. (Entonces la clasificación de A es igual a la de D).

DEMOSTRACIÓN:
Se tiene que $A = LU = (LU)^T = U^T L^T = A^T$.

Pero L es invertible, entonces $U(L^T)^{-1} = L^{-1}U^T$.
Por triangularidad esta última matriz es triangular superior e inferior, luego es diagonal.

□

Ejemplo 4.27. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Definición 4.28. Dada A de $n \times n$, la submatriz principal A_k para $k = 1, \ldots, n$ es la matriz que resulta de eliminar la últimas $n - k$ filas y las últimas $n - k$ columnas de A. Notar que $A_n = A$.

Proposición 4.29. Si A es de $n \times n$ y sus submatrices principales $A_1, \cdots, A_{n-1}$ son invertibles, entonces A admite la descomposición LU. Si L tiene sólo unos en su diagonal, entonces L y U son únicas.

Ejemplo 4.30. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Proposición 4.31. Sea $A = A^T$. Si A es definida positiva, entonces

- A es invertible.
- A_k es definida positiva, para todo $k = 1, \ldots, n$.
- A_k es invertible, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 4.32. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Teorema 4.33. Sea $A = A^T$. A es definida positiva si y sólo si existe L triangular inferior invertible con unos en su diagonal, y D diagonal, con elementos en la diagonal positivos, tal que $A = LDL^T$.

Ejemplo 4.34. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Observación 4.35. En el teorema anterior se define a $\sqrt{D}$ como la matriz diagonal, que en su diagonal tiene las raíces positivas de los elementos de la diagonal de D. Entonces

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = R^T R$$

que es llamada la descomposición con raíz cuadrada de una matriz definida positiva. (o de Cholesky).

Ejemplo 4.36. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Ejemplo 4.37. Finales

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = LU \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^T R
\end{aligned}
$$

2. Sea A de $n \times m$ tal que admite la factorización $A = LU$. Demuestre que si U es inyectiva, entonces A es inyectiva.

3. Suponga que U se obtiene de hacer en A el intercambio de la fila 1 con la 2 y luego restar la fila 2 a la fila 3. Use $PA = LU$ para resolver el sistema $Ax = b$ donde:

$$
U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

4. Use Cholesky para clasificar las siguientes formas cuadráticas y exprésela como una suma ponderada de cuadrados.

   - $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 2y^2 + 15z^2$.
   - $x^2 + 4xy + 2xz + 4yz + y^2 + z^2$.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$. Demuestre que AA^T es definida positiva.

6. Encuentre la factorización de Cholesky de la matriz

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}
$$

Capítulo 5

Determinantes

Definición 5.1. Determinante es una función: Det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que:

- $|I| = 1$
- Si $E_I A = B \to -|A| = |B|$
- Si $E_{II} A = B \to \lambda|A| = |B|$
- Si $E_{III} A = B \to |A| = |B|$

Ejemplo 5.2.

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Observación 5.3. Tomando $A = I$ en la definición: $|E_I| = -1$, $|E_{II}| = \lambda$, $|E_{III}| = 1$. Reemplazando en la definición queda que si E es una matriz elemental, entonces $|EA| = |E| \cdot |A|$.

Observación 5.4. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $|A| = ad - bc$

Ejemplo 5.5. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

Proposición 5.6. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si A tiene dos filas iguales, entonces $|A| = 0$.
- Si A tiene una fila nula, entonces $|A| = 0$.
- Si A es triangular o diagonal, entonces $|A| = \Pi a_{i,i}$.

DEMOSTRACIÓN:
Usando operaciones elementales y la definición.

□

Teorema 5.7. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN:
Usando matrices elementales.

□

Ejemplo 5.8. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & a \end{bmatrix}$ es invertible?

Teorema 5.9. Sean A y B matrices cuadradas. Entonces $|AB| = |A| \cdot |B|$. (Usar: A y B son invertibles si y sólo si AB es invertible.)

DEMOSTRACIÓN:

□

Ejemplo 5.10. Si Det $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = 5$, calcule Det $\begin{bmatrix} 5u - v & u + 3v \end{bmatrix}$.

Proposición 5.11. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- $|A^T| = |A|$
- Si A es invertible, entonces $|A^{-1}| = 1/|A|$

Ejemplo 5.12. Si Det $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = 5$, calcule Det $\begin{bmatrix} 5u - v & u + 3v \end{bmatrix}^T$.

Definición 5.13. Menor i, j de una matriz A es el determinante de la matriz que resulta de eliminar de A la fila i y la columna j. Notación: $M_{i,j} =$. Cofactor i, j de una matriz A es $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$

Ejemplo 5.14. En $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $M_{1,2} = -2$ y $C_{1,2} = 2$.

Teorema 5.15. $|A| = a_{i,1}C_{i,1} + \ldots + a_{i,n}C_{i,n}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. (caso $i = 1$)

Ejemplo 5.16. Det $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, Det $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 84 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Observación 5.17. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si $PA = LU$, entonces $(-1)^k|A| = \Pi u_{i,i}$
- Si $A = LDL^T$, entonces $|A| = \Pi d_{i,i}$

Definición 5.18. Sea A una matriz de cuadrada. La adjunta de A: $\text{Adj}(A) = (c_{i,j})^T$.

Ejemplo 5.19. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Teorema 5.20. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces $A \cdot \text{Adj}(A) = \text{Adj}(A) \cdot A = |A|\ I$

Ejemplo 5.21.

Observación 5.22. Sea A una matriz cuadrada. Si A es invertible, entonces $A^{-1} = 1/|A|\ \text{Adj}(A)$

Proposición 5.23. Sea A una matriz simétrica. A es definida positiva si y sólo si, los determinantes de las submatrices principales son todos positivos.

Ejemplo 5.24. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3a \end{bmatrix}$ es positiva definida?

Ejemplo 5.25. Finales

1. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 5$, encuentre $|2A|$, $|4A|$, $|2^k A|$, $|A^5|$, $|-A|$, $|A^{-1}|$, $||A|A^{-1}|$, $|A^{-3}|$, $||A|A|$

2. Sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$, encuentre el $|A|$ si
$A = [v_1 - v_3 + v_4 \quad -v_2 - v_3 \quad v_3 - v_1 \quad v_1 + v_2 + 2v_4] \in M_4(\mathbb{R})$

3. Sea A de 5×5 tal que $\text{Det}(A - I) = 0$.
Demuestre que existe $v \in \mathbb{R}^5$ tal que $Av = v$.

4. Dé un ejemplo de matrices tal que $|A + B| \neq |A| + |B|$.

5. Sea $a \in \mathbb{R}$, calcule el determinante de la siguiente matriz de $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}$$

Solución:

Si $a = 1$, quedan todas las filas iguales y entonces el determinante es 0.

Haciendo las operaciones: $F_i \to F_i - F_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, n-1$ queda:

$$= \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_i \to (1/(a-1))F_i$, para $i = 1, \ldots, n-1$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_n \to F_n - F_1$, ..., $F_n \to F_n - F_{n-1}$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

Queda una matriz diagonal, entonces el determinante pedido es:

$(a-1)^{n-1}(a+n-1)$.

Capítulo 6

Espacios vectoriales y Transformaciones lineales

Definición 6.1. Un conjunto no vacío V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ si existen dos operaciones: suma y multiplicación por escalar tal que:

- $+$ es cerrada: $\forall u, v \in V \; u + v \in V$
- $+$ es asociativa: $\forall u, v, w \in V \; (u + v) + w = u + (v + w)$
- $+$ es conmutativa: $\forall u, v \in V \; u + v = v + u$
- Existe un neutro para la $+$: $\exists \vec{0}_V \forall u : \vec{0}_V + u = u + \vec{0}_V = u$
- Existe un inverso para la $+$: $\forall u \exists (-u) : u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$
- $\cdot$ es cerrada: $\forall u \in V, \alpha \in \mathbb{R} \; \alpha \cdot u \in V$
- $\forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \; \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta u)$
- $\forall u \in V \; 1 \cdot u = u$

A los elementos de V se les llama vectores (objetos).

Ejemplo 6.2. Algunos espacios vectoriales:

- $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.
- $P_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $M_{n,m}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $C[a,b]$ sobre $\mathbb{R}$.

Proposición 6.3. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces

- $\alpha \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V$.
- $0 \cdot u = \vec{0}_V$.
- $\alpha \cdot u = \vec{0}_V$ si y sólo si $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}_V$.

Ejemplo 6.4. Identificar el neutro de la suma en

- $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.
- $P_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $M_{n,m}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $C[a,b]$ sobre $\mathbb{R}$.

Definición 6.5. Una combinación lineal de objetos $v_1, \ldots, v_m$ es un objeto de la forma $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$.

Ejemplo 6.6.
- En $\mathbb{R}^n$
- En $P_n(\mathbb{R})$
- En $M_{n,m}(\mathbb{R})$
- En $C[0,\pi]$, $1 \cdot \text{sen}^2 + 1 \cdot \cos^2 = 1$.

Definición 6.7. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

- S es linealmente independiente si la única manera de construir al objeto cero es la trivial:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \vec{0}_V \to \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$$

- S es linealmente dependiente si es posible construir al vector cero de manera no trivial:

$$\exists \alpha_1, \dots \alpha_m \text{ no todos nulos, tal que } \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \vec{0}_V$$

Ejemplo 6.8. En $M_{2\times 2}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I \right\}$ es linealmente independiente.

Teorema 6.9. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. S es LD si y sólo si existe $v \in S$ que es combinación lineal del resto de los vectores de S.

Ejemplo 6.10. En $P_2(\mathbb{R})$, el conjunto $\{t^2 - t + 1, t - 1, 2 + t + t^2, t - 3\}$ es L.D. y un polinomio es combinación lineal del resto.

Definición 6.11. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. El conjunto generado por S es $\operatorname{Gen} S = \operatorname{Gen}\{v_1, \dots, v_m\} = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m, \text{ tal que } \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo 6.12. En $P_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{Gen}\{1, t, t^2\} = P_2(\mathbb{R})$

Observación 6.13. $\{\vec{0}_V\}$ es L.D. y $\{\vec{0}_V\} = \operatorname{Gen}\{\vec{0}_V\}$

Proposición 6.14. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. v_j es combinación lineal de vectores de $S \leftrightarrow \operatorname{Gen} S = \operatorname{Gen}(S - \{v_j\})$

Ejemplo 6.15. Estudiar $\operatorname{Gen}\{1 + t - t^2, t - t^2, 1 + 2t\}$.

Proposición 6.16. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. Si S es LI y $v \in \operatorname{Gen} S$, entonces v se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de S.

Demostración:
Si no se escribiera de manera única, entonces S no es L.I.

□

Ejemplo 6.17. En $P_2(\mathbb{R})$ considere $S = \{1 + t, 1 + t^2\}$ y el polinomio $t - t^2$.

Definición 6.18. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $U \subseteq V$. U es un subespacio de V si es distinto del vacío y con las operaciones heredadas de V es un espacio vectorial. Notación: $U \leqslant V$

Ejemplo 6.19. Las matrices simétricas de 2×2

Proposición 6.20. $U \leqslant V$ si y sólo si U es no vacío, es cerrado bajo la suma y es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Ejemplo 6.21.

- $U = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) \,/\, p(1) = 0\}$ es un subespacio de $P_2(\mathbb{R})$.
- $U = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) \,/\, p(1) = 1\}$ no es un subespacio de $P_2(\mathbb{R})$.

Observación 6.22. Todo conjunto generado es un subespacio.

Teorema 6.23. Si $V = \text{Gen}\{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es L.I., entonces todo conjunto L.I. de V contiene a lo más n elementos.

$B \subset V$ es una base de V si B es LI y $\text{Gen}\{B\} = V$.

Si B es una base de V y la cardinalidad de B es n, entonces todas las bases de V tienen n elementos. Se dice que la dimensión de V es n. Notación: $\text{Dim}(V) = n$.

Ejemplo 6.24.

- $\{1, t, t^2\}$.
- $\{1, 1+t, 1+t^2\}$.
- $\{e_1, \cdots, e_n\}$.
- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Proposición 6.25. Si $\text{Dim}(V) = n$, entonces

- S es LI $\rightarrow \#S \leqslant n$.
- $\text{Gen}\{S\} = V \rightarrow \#S \geqslant n$.

Ejemplo 6.26. En $P_2(\mathbb{R})$

Proposición 6.27. Si $\text{Dim}(V) = n$ y $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

- S es LI $\rightarrow \text{Gen}\{S\} = V$.

- $\text{Gen}\{S\} = V \to S$ es L.I.

Ejemplo 6.28. En $M_{2\times 2}$

Observación 6.29. Si U es subespacio de V y $\text{Dim}(V) = n$, entonces $\text{Dim}(U) \leqslant \text{Dim}(V)$

Proposición 6.30. Sea A de $n \times m$. Entonces

- $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión igual al rango de A.
- $F(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ de dimensión igual al rango de A.
- A^T es de $m \times n$, $F(A^T) = C(A)$ y $C(A^T) = F(A)$.

Ejemplo 6.31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Definición 6.32. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $v \in V$ tal que $v = x_1v_1 + \ldots x_nv_n$. El vector coordenado de v en la base B es:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.33. El vector coordenado de $10+3t-5t^2$ en la base $\{1, 1+t, 1-t^2\}$ es $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Proposición 6.34. Sean $u, v \in V$ y B una base de V. Entonces

- $[u + v]_B = [u]_B + [v]_B$.
- $[\alpha u]_B = \alpha[u]_B$.
- $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es L.I. si y sólo si $\{[u_1]_B, \ldots, [u_m]_B\}$ es L.I.
- $u \in \text{Gen}\{u_1, \ldots, u_m\}$ si y sólo si $[u] \in \text{Gen}\{[u_1]_B, \ldots, [u_m]_B\}$.

Demostración:

□

Ejemplo 6.35. Usar vectores coordenados para decidir si $\{1 - t + t^2, 1 + 3t - 4t^2, 2 + 5t - t^2\}$ es L.I. o L. D.

Definición 6.36. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de V. Se define la matriz $P = [\ [v_1]_{B_2}\ \ldots\ [v_n]_{B_2}\ ]$.

Proposición 6.37. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de V. Si P es la matriz de la definición anterior, entonces:

- Para todo $x \in V$: $P \cdot [x]_{B_1} = [x]_{B_2}$.
- P es invertible.
- $(P)^{-1} = [\ [u_1]_{B_1}\ \ldots\ [u_n]_{B_1}\ ]$

Demostración:

□

Ejemplo 6.38.

- Si $P[p(t)]_1 = [p(t)]_2$ para todo $p(t) \in P_1(\mathbb{R})$, determine B_1 si $B_2 = \{1 + -, 1 + 2t^2\}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- Si $P[p(t)]_1 = [p(t)]_2$ para todo $p(t) \in P_1(\mathbb{R})$, determine B_2 si $B_1 = \{1 + -, 1 + 2t^2\}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Definición 6.39. Sean V y W espacios vectoriales. $T : V \to W$ es una transformación lineal si $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ y $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Ejemplo 6.40.

- Si $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformacin lineal, entonces para todo $u \in \mathbb{R}^m$, $T(u) = Au$ donde A es única y sus columnas son las imágenes de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^m$.
- $T : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ con $T(A) = \mathrm{Det}(A)$ no es una transformación lineal.

Proposición 6.41. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

- $T(\vec{0_V}) = \vec{0_W}$.
- $T(-v) = -T(v)$.
- Si B es una base de V, entonces T queda determinada por cómo actúa sobre la base.

Demostración:

□

Definición 6.42. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- $\text{Nul}(T) = \{v \in V : T(v) = \overrightarrow{0_W}\}$.
- $\text{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V : T(v) = w\}$.

Ejemplo 6.43.

$T : M_{2\times 2} \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a-2b)+(b-2c+d)t+(2b-a)t^2$

Proposición 6.44. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- $\text{Nul}(T)$ es un subespacio de V y su dimensión se dice la nulidad de T.
- Im(T es un subespacio de W y su dimensión se dice el rango de T.

Demostración:

□

Ejemplo 6.45.

$T : M_{2\times 2} \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a-2b)+(b-2c+d)t+(2b-a)t^2$

Observación 6.46. Si B es una base de V, entonces $\text{Gen}\, T(B) = \text{Im}(T)$.

Ejemplo 6.47.

$T : M_{2\times 2} \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a-2b)+(b-2c+d)t+(2b-a)t^2$

Definición 6.48. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- Si T es inyectiva se dice que es un monomorfismo.
- Si T es sobre se dice que es un epimorfismo.
- Si T es inyectiva y sobre se dice que es un isomorfismo y se denota por $V \cong W$.

Teorema 6.49. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- T es inyectiva si y sólo si $\text{Nul}(T) = \{\vec{0_V}\}$.
- T es sobre si y sólo si $\text{Im}(T) = W$.

Demostración:

□

Ejemplo 6.50.

$T : M_{2\times 2} \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a-2b)+(b-2c+d)t+(2b-a)t^2$

Proposición 6.51. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Si T es inyectiva y $S \subset V$ es L.I., entonces $T(S)$ es L.I.

Demostración:

□

Teorema 6.52. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\text{Dim Nul}(T) + \text{Dim Im}(T) = \text{Dim}(V).$$

Ejemplo 6.53.

$T : M_{2\times 2} \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a-2b)+(b-2c+d)t+(2b-a)t^2$

Ejemplo 6.54. Finales

1. Sea $\{u_1, u_2, u_3\}$ un conjunto L.I. en $\mathbb{R}^4$. Considere las matrices

$$A_1 = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3] \quad , \quad A_2 = [u_2 \;\; u_1 \;\; u_3] \quad , \quad A_3 = [u_2 \;\; u_3 \;\; u_1]$$

   Demuestre que $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

2. Sea A de 5×4. Demuestre que el siguiente conjunto U es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.

$$U = \{b \in \mathbb{R}^5 \;:\; Ax = b \quad \text{es consistente}\}$$

3. Sea $U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) :\; p(-1) = 0\;\}$

   a) Demuestre que U es subespacio de $P_3(\mathbb{R})$

   b) Encuentre una base de U

   c) Determine $\operatorname{Dim} U$

4. Considere el espacio vectorial $V = C[0, 2\pi]$ y el conjunto

$$U = \{f(x) \in V \;:\; f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0\}$$

   Demuestre que U es subespacio de V.

5. Sea A de 4×3, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Demuestre que si $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces $\{A, AB, AC\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

   Solución:

   Sea $\alpha A + \beta AB + \gamma AC = 0$ (matriz nula). p.d.: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Sea $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ tal que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$.

Y entonces $AB = [v_3\ v_1\ v_2]$ y $AC = [v_3\ v_2\ v_1]$.

Entonces $[\alpha v_1 + (\beta+\gamma)v_3 \ \ \beta v_1 + (\alpha+\gamma)v_2 \ \ \gamma v_1 + \beta v_2 + \alpha v_3] = 0$

Dado que $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces se tiene que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.I.

De la segunda columna se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

6. Sean $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y los subespacios
$U_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) :\ {u_1}^T A u_1 = 0\}$ y $U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) :\ {u_2}^T A u_2 = 0\}$.

   a) Demuestre que U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

   Solución:

   U_1 es no vacío pues tomando $A = 0$ la matriz nula se tiene que ${u_1}^T 0 u_1 = 0$.

   Dadas $A, B \in U_1$, se tiene que ${u_1}^T(A+B)u_1 = {u_1}^T A u_1 + {u_1}^T B u_1 = 0 + 0 = 0$.

   Dada $A \in U_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que ${u_1}^T(\alpha A)u_1 = \alpha({u_1}^T A u_1) = \alpha 0 = 0$.

   Por lo tanto U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

   b) Calcule bases y dimensión de U_1, U_2 y $U_1 \cap U_2$.

   Solución:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_1$ si $a - c - b + d = 0$.

Por lo tanto $U_1 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}$.

La dimensión de U_1 es 3 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_2$ si $4a + 2b + 2c + d = 0$.

Por lo tanto $U_2 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\}$.

La dimensión de U_2 es 3 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para buscar una base de $U_1 \cap U_2$ se considera la siguiente matriz de vectores coordenados con respecto a la base canónica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el Nul $= \text{Gen}\{(1, 0, -1, -1, 0, 1)^T, (1, -1, 0, -1, 1, 0)^T\}$

Finalmente $U_1 \cap U_2 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\}$

La dimensión de $U_1 \cap U_2$ es 2 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre

   a) Si T es inyectiva, entonces $\text{Dim}\, V \leq \text{Dim}\, W$

   b) Si T es sobreyectiva, entonces $\text{Dim}\, W \leq \text{Dim}\, V$

8. Sean V de dimensión 3 y W de dimensión 4 espacios vectoriales tal que $V = \text{Gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ y $W = \text{Gen}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sea $T : V \to W$ lineal tal que

$$\begin{array}{rcl} T(v_1 - v_3) & = & w_1 + w_2 \\ T(v_1 - v_2 - v_3) & = & w_1 + w_3 \\ T(v_1 - v_2 - 2v_3) & = & w_1 + w_4 \end{array}$$

   ¿Es T es 1-1 ? ¿Es T sobre? Justifique.

9. Sea $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal dada por

   $T(p(x)) = p''(1) + p'(1)x + p(1)x^2$

   Calcule bases para $\text{Nul}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

   Solución:

   Del enunciado, $T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (2c + 6d) + (b + 2c + 3d)x + (a + b + c + d)x^2$.

   Luego, si se considera las bases canónicas, la siguientes matriz es tal que para todo $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$ se cumple que $[T(p(x)] = A[p(x)]$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego $\text{Nul}(T) = \text{Gen}\{1 - 3x + 3x^2 - x^3\}$.

Dado que es un polinomio, se tiene que $\{1 - 3x + 3x^2 - x^3\}$ es L.I. y por lo tanto una base de $\text{Nul}(T)$.

$\text{Im}(T) = \text{Gen}\{x, x + x^2, 2 + 2x + x^2\}$.

De las columnas pivote de la F.E. de la matriz anterior, se tiene que $\{x, x + x^2, 2 + 2x + x^2\}$ es L.I. y por lo tanto una base de $\text{Im}(T)$.

(Otra manera es decir que como el Nul tiene dimensión 1 y $P_3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4, entonces por teorema, $\text{Im}(T)$ tiene dimensión 3, y como es subespacio de $P_2(\mathbb{R})$ de dimensión 3, entonces $P_2(\mathbb{R}) = \text{Im}(T)$ y por lo tanto una base es $\{1, x, x^2\}$).

Capítulo 7

Valores y vectores propios

Observación 7.1. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, supongamos que define una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(u) = Au$.

Si un objeto se encuentra en la posición del plano dada por el vector u_0, se puede hablar del movimiento de este objeto en el plano dando su posición $u_k = A^k u_0$ en el tiempo k.

Por ejemplo si $u_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ es la posición inicial de un objeto en el plano, entonces la posición en la unidad de tiempo k -ésima es

$$u_k = A^k u_0 = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ veces}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Así $u_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5/2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 21/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 47/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}$, etc.

Pero la matriz A que define a T tiene una **particularidad**:

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entonces:

$A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1/2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

¿De qué sirve que la matriz A tenga esa **particularidad**?

Usamos que $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si multiplicamos por A^k queda:

$$A^k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 13A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5A^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando la **particularidad** se tiene que:

$$A^k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5(1/2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Luego la posición en el tiempo k- ésimo está dada por:

$$u_k = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5(1/2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos entonces preguntar qué pasa si k tiende a infinito, es decir:
$\lim_{k\to\infty} u_k = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- ¿Qué significa esa **particularidad** ?
- ¿Cómo saber si una matriz tiene esa **particularidad** ?

Definición 7.2. Sea A de $n \times n$, $v \neq \vec{0}$ es un vector propio de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Se dice que λ es el valor propio de A asociado a v. Notamos que $\mathbf{v} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ pues $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y no es ninguna **particularidad**.

Ejemplo 7.3.

Observación 7.4. Dada una matriz cuadrada, ¿cómo obtener los valores y vectores propios (si es que existen). En la definición se necesita que:

$$Av = \lambda v$$

$$Av - \lambda v = \vec{0}$$

$$Av - \lambda I\, v = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\, v = \vec{0}$$

$$v \in \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$$

$(A - \lambda I)$ es no invertible

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$$

Proposición 7.5. Sea A de $n \times n$. λ es valor propio de A si y sólo si $|A - \lambda I| = 0$.

Ejemplo 7.6.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Para obtener valores propios queremos que $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$.

Se resuelve $\mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1/2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(1/2-\lambda) = 0$.

Los valores propios son $\{\mathbf{1}, \mathbf{1/2}\}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{1}$ son $v \in \mathrm{Nul}(A - (1)I)$.

Como $A - (1)I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{1/2}$ son $v \in \mathrm{Nul}(A - (1/2)I)$.

Como $A - (1/2)I = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$ con $\beta \in \mathbb{R}$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

  Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

  Se resuelve $\text{Det} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$.

  Los valores propios son $\{\mathbf{1}\}$.

  Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{1}$ son $v \in \text{Nul}(A - (1)I)$.

  Como $A - (1)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

  Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

  Se resuelve $\text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^2 = 0$.

  Los valores propios son $\{\mathbf{0}\}$.

  Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{0}$ son $v \in \text{Nul}(A - (0)I)$.

  Como $A - (0)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

  Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

Se resuelve Det $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0.$

Los valores propios son $\{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{0}$ son $v \in \text{Nul}(A - (0)I)$.

Como $A - (0)I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{2}$ son $v \in \text{Nul}(A - (2)I)$.

Como $A - (2)I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ con $\gamma \in \mathbb{R}$.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

  Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

  Se resuelve Det $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0.$

  Los valores propios son $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.

  Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{2}$ son $v \in \text{Nul}(A - (2)I)$.

  Como $A - (2)I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{3}$ son $v \in \text{Nul}(A - (3)I)$.

Como $A-(3)I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ con $\gamma \in \mathbb{R}$.

Matriz	Valores propios	Vectores propios	Cantidad de vectores propios L.I.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$	2
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\{0\}$	$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$	2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\{0, 2\}$	$\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$	3
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\{2, 3\}$	$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$	2

Definición 7.7. Sea A de $n \times n$. La ecuación característica de A es $|A - xI| = 0$. La multiplicidad algebraica de λ, valor propio, es la multiplicidad como raíz de $|A - xI| = 0$. (m.a.)

Observación 7.8. Sea A de $n \times n$. Si v_1 y v_2 son vectores propios asociados al valor propio λ, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αv_1 y $v_1 + v_2$ son vectores propios asociados a λ.

Ejemplo 7.9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definición 7.10. Sea A de $n \times n$ y λ un valor propio de A. $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$ es el espacio propio asociado a λ. La dimensión de E_λ es la multiplicidad geométrica de λ.(m.g.). $E_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I)$.

Proposición 7.11. Sea A de $n \times n$. Entonces

- $1 \leq m.g. \leq m.a. \leq n$
- A tiene a lo más n valores propios.
- Si A es diagonal, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- Si A es triangular superior o inferior, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- A es no invertible si y sólo si 0 es valor propio de A. (Esto NO significa que una matriz no invertible no pueda tener valores propios destintos de cero. Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).
- Si λ es valor propio de A, entonces λ^m es valor propio de A^m, para $m \in \mathbb{N}$.
- Si λ es valor propio de A y A es invertible, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.
- Los valores propios de una matriz son los mismos que los de su transpuesta. Esto es porque $\text{Det}(A - \lambda I) = \text{Det}(A^T - \lambda I)$. Esto NO significa que los vectores propios son los mismos. Por ejemplo:

Matriz	Valores propios	Vectores propios
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\{1, 2\}$	$E_1 = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, E_2 = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
$A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\{1, 2\}$	$E_1 = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, E_2 = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- Si u es vector propio asociado al valor propio λ_1 y v es vector propio asociado al valor propio λ_2, entonces $\{u, v\}$ es L.I.

- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A, entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$.

- Existen matrices que NO tiene valores propios reales. Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ pues su ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$.

- Las siguientes expresiones de un determinante son iguales:

$$\begin{array}{|l|}\hline \\ \text{Det}(P^{-1}AP - \lambda I) \\ \text{Det}(P^{-1}\,A\,P - \lambda P^{-1}\,I\,P) \\ \text{Det}(P^{-1}\,(A - \lambda I)P) \\ \text{Det}(P^{-1})\ \text{Det}(A - \lambda I)\ \text{Det}(P) \\ \text{Det}(A - \lambda I)\ \text{Det}(P^{-1})\ \text{Det}(P) \\ \text{Det}(A - \lambda I) \\ \hline \end{array}.$$

Definición 7.12. Dos matrices A y B se dicen similares si existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = B$. Si dos matrices son similares entonces tienen la misma ecuación característica y los mismos valores propios.

Por ejemplo $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P$
con $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto A y B son similares.

Pero también $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P$
con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto A y D son similares.

Proposición 7.13. Si A y B son similares, entonces tienen los mismos valores propios (tienen la misma ecuación característica). Si L es tal que $L^{-1}AL = B$ y v es vector propio de B asociado a λ, entonces Lv es vector propio de A asociado a λ.

Definición 7.14. Una matriz cuadrada A (o transformación lineal T) es diagonalizable si y sólo si es similar a una matriz diagonal.

Ejemplo 7.15.

Observación 7.16. Dada una matriz A si queremos que exista una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP$ sea igual a una matriz diagonal D, entonces

$$A\,P = P\,D$$

Si P tiene columnas v_j y D tiene elementos λ_j en la diagonal entonces:

$$A\,[v_1\ \cdots\ v_n] = [v_1\ \cdots\ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando se tiene:

$$[Av_1\ \cdots\ Av_n] = [\lambda_1 v_1\ \cdots\ \lambda_n v_n]$$

Lo que se traduce en que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de vectores propios.

Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Proposición 7.17. Si A y B son similares, entonces A es diagonalizable si y sólo si B es diagonalizable.

Teorema 7.18. A es diagonalizable si y sólo si existen n vectores propios L.I. de A. Es decir cuando $\sum m.g = \sum m.a. = n$ y todos los valores propios son reales. (Observar que en este curso los valores propios siempre serán reales).

Ejemplo 7.19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Corolario 7.20. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Ejemplo 7.21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Observación 7.22. Si A es diagonalizable, entonces A^m es diagonalizable, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observación 7.23. Si A es tal que $Au = \lambda u$, entonces $A^k u = \lambda^k u$. Luego $\lim_{k\to\infty} A^k u = \left(\lim_{k\to\infty} \lambda^k\right) u$.

Observación 7.24. Si $Av = \lambda v$, entonces $\lim_{k\to\infty} A^k v =$

- 0 si $|\lambda| < 1$,
- v si $\lambda = 1$,
- no existe si $|\lambda| > 1$.

Ejemplo 7.25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Definición 7.26. Dado un polinomio $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ y A matriz cuadrada, se define a $q(A)$ como la matriz $a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m$.

Ejemplo 7.27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ en $q(x) = x^3 - 5x^2 + 3$.

Observación 7.28. Dado un polinomio $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ y D matriz diagonal, se tiene que $q(D)$ es la matriz diagonal cuya diagonal se forma con los elementos de la diagonal de D evaluados en $q(x)$.

Demostración:

□

Ejemplo 7.29. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Teorema 7.30. Sea A matriz cuadrada y $q(x) = \text{Det}(xI - A)$, entonces $q(A)$ es la matriz nula.

Ejemplo 7.31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Observación 7.32. Sea A es diagonalizable y $q(x)$ un polinomio. Entonces

- $A = L \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} L^{-1} \to q(A) = L \begin{bmatrix} q(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(d_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & q(d_n) \end{bmatrix} L^{-1}$
- $A = L \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} L^{-1} \to e^A = L \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix} L^{-1}$

Ejemplo 7.33. Finales

1. Sea A de $n \times n$ tal que $A^8 = 7A^7$. Pruebe que si 7 no es valor propio de A, entonces A es singular.

2. Demuestre que la matriz $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{bmatrix}$ es diagonalizable si y sólo si $|a| > 1$

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $5x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

   Solución:

   Matricialmente queda

   $$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

Polinomio característico de la matriz: $(x - 1/5)(x - 1)$.

Valores propios: $1/5, 1$.

$E_1 = \text{Gen}\{(1,1)^T\}$.

$E_{1/5} = \text{Gen}(1,5)^T\}$.

$L^{-1}AL = D \to A = LDL^{-1} \to A^n = LD^nL^{-1}$.

$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

$L^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} A^n = L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 5/4 & -1/4 \end{bmatrix}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5x_1 - x_0}{4}$.

4. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Calcule e^A.

   Solución:

De la escalonada reducida $\text{Nul}(A) = \text{Gen}\{(0,1,0)^T, (1,0,1)^T\}$.

Por lo tanto 0 es un valor propio de A con m.g. $= 2$.

Además $A(1,2,3)^T = 2(1,2,3)^T$.

Por lo tanto 2 es un valor propio de A con m.g. $= 1$. (no puede ser mayor pues la matriz es de 3×3).

La diagonalización queda:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$A = LDL^{-1}$ entonces $e^A = Le^D L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3-e^2}{2} & 0 & \frac{e^2-1}{2} \\ 1-e^2 & 1 & e^2-1 \\ \frac{3-3e^2}{2} & 0 & \frac{3e^2-1}{2} \end{bmatrix}$.

Capítulo 8

Ortogonalidad

Definición 8.1.

- Dados $u, v \in V$, u es ortogonal a v si $u \cdot v = 0$. Notación: $u \perp v$.
- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es ortogonal si el conjunto no contiene a $\vec{0}$ y $u_i \cdot u_j = 0$ para todo $i \neq j$
- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es ortonormal si el conjunto es ortogonal y $u_i \cdot u_i = 1, \forall i$.

Ejemplo 8.2.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Observación 8.3. $u \perp \vec{0}$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Observación 8.4. Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ortogonal y $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$, entonces

$$\alpha_i = \frac{u \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

Demostración:

□

Observación 8.5. Todo conjunto ortogonal es L.I., y por lo tanto una base de su conjunto generado.

Proposición 8.6. Sea $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$. Entonces

- S es LI si y sólo si $A^T A$ es definida positiva.
- S es ortogonal si y sólo si $A^T A$ es diagonal y definida positiva.
- S es ortonormal si y sólo si $A^T A = I$.

Demostración:

- S es LI si y sólo si $A^T A$ es definida positiva.

  Sea u un vector , como $uA^T Au = \|Au\|^2$ entonces si $uA^T Au = 0$, se tiene que $Au = \vec{0}$.

  Si S es L.I., entonces A es inyectiva y $Au = \vec{0}$ implica que $u = \vec{0}$.

  Si $A^T A$ es positiva definida y $Au = \vec{0}$, entonces $u^T A^T Au = 0$, luego $u = \vec{0}$ por lo tanto A es inyectiva y S L.I.

- S es ortogonal si y sólo si $A^T A$ es diagonal y definida positiva.

  Basta notar que $A^T A$ es la matriz de los productos puntos de las columnas de A.

- S es ortonormal si y sólo si $A^T A = I$.

  Basta notar que $A^T A$ es la matriz de los productos puntos de las columnas de A.

□

Definición 8.7. Dado $U \leq \mathbb{R}^n$, el ortogonal a U es $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u \cdot w = 0\}$.

Ejemplo 8.8. Para $U = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, U^\perp = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Proposición 8.9. Sea $\mathbb{R}^n$ con el producto punto usual.

- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U, entonces $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u_i \cdot w = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m\}$.
- $\vec{0} \in U^\perp$
- $U^\perp$ es un subespacio de R^n.
- $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^{n\perp} = \{\vec{0}\}$.
- $U^{\perp\perp} = U$
- $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$.
- Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base de U y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$. Entonces $U^\perp = \text{Nul}(A^T)$.
- Dado $v \in \mathbb{R}^n$, existen únicos $u \in U$ y $w \in U^\perp$ tal que $v = u + w$.
- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$, entonces $u = Ax$, donde x es tal que $A^T Ax = A^T v$.
- Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de $U^\perp$ y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \ldots w_r]$, entonces $w = By$, donde y es tal que $B^T By = B^T v$.

Demostración:

□

Ejemplo 8.10. Para $U = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ y $U^\perp = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

se tiene:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Definición 8.11. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in U$ y $w \in U^\perp$ donde $v = u + w$.

- La proyección ortogonal sobre U es $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $P(v) = u$.
- La proyección ortogonal sobre $U^\perp$ es $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $Q(v) = w$.

Proposición 8.12. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$, P la proyección ortogonal sobre U y Q la proyección ortogonal sobre $U^\perp$. Entonces

- P y Q son transformaciones lineales.
- $P + Q = I$ (como t.l.).
- $\text{Nul}(P) = U^\perp$, $\text{Im}(P) = U$.
- $\text{Nul}(Q) = U$, $\text{Im}(Q) = U^\perp$.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como t.l.).
- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$, entonces la matriz de P con respecto a la base canónica es $P = A(A^T A)^{-1} A^T$.
- Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de $U^\perp$ y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \ldots w_r]$, entonces la matriz de Q con respecto a la base canónica es $Q = B(B^T B)^{-1} B^T$.
- P y Q son simétricas.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como matrices).
- $P + Q = I$ (como matrices).
- $2P - I = R$ es matriz de reflexión, es simétrica y $R^2 = I$.
- P, Q y R son diagonalizables. Para P: $E_1 = U$ y $E_0 = U^\perp$. Para Q: $E_1 = U^\perp$ y $E_0 = U$. Para R: $E_1 = U$ y $E_{-1} = U^\perp$.

Demostración:

□

Ejemplo 8.13. Ver ejemplo 5. del final del capítulo.

Proposición 8.14. Sea el sistema $Ax = b$ inconsistente y x^* tal que $\|Ax^* - b\|$ es mínima. Entonces x^* es tal que Ax^* es la proyección de b sobre $\mathrm{Im}(A)$.

Ejemplo 8.15. Ver ejemplo 4. del final del capítulo.

Observación 8.16. Descomposición QR.
Sea $A = [v_1 \cdots v_m]$ una matriz con columnas L.I. El problema es encontrar una matriz cuyas columnas formen un conjunto ortonormal que genere lo mismo que las columnas de A, es decir se busca una matriz Q tal que:

$$Q = [u_1 \cdots u_m], \ \ \mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Im}(A) \ \text{ y } \ Q^T Q = I.$$

Sea R la matriz cambio de base de $m \times m$, es decir $A = QR$. Entonces

$$A^T A = (QR)^T QR = R^T Q^T QR = R^T IR = R^T R.$$

Dado que A es inyectiva, luego $A^T A$ es definida positiva y basta tomar su descomposición con raíz cuadrada R. Obteniendo R se calcula $Q = AR^{-1}$.

Proposición 8.17. Gram Schmidt: Dado $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ L.I., una base ortogonal de $< S >$ es $\{u_1, \ldots, u_m\}$, donde:

- $u_1 = v_1$
- $u_2 = v_2 - \dfrac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$
- $u_3 = v_3 - \dfrac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \dfrac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$
- ....

Ejemplo 8.18. Sea $U = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Determine una base ortonormal de U.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^TR$$

Luego $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Entonces $Q = \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Entonces $U = < \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} \\ 0 \\ 1\sqrt{3} \\ 1\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} \\ 0 \\ 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \end{bmatrix} >$

Ejemplo 8.19. Finales

1. Determine la proyección de $v = e_1 - e_3 + e_4 + e_5 \quad \in \mathbb{R}^5$ sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 0$.

2. Determine la matriz de proyección sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + x_4 = 0$.

3. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que

$$P_U(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - e_3) \quad P_U(e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + e_3)$$

   Determine la matriz de proyección sobre U.

4. Encuentre $\underset{x-y-2z=2}{min}\ (x-3)^2+(2y-1)^2+(z+5)^2$ usando proyecciones

5. Sea U el hiperplano en $\mathbb{R}^4$, dado por la ecuación $2x_1-x_2+x_3-2x_4=0$. Calcule bases de U y de $U^\perp$. Calcule la proyección de $v=(2,-1,3,0)^T$ sobre U y sobre $U^\perp$. Calcule la matriz de proyección sobre U y sobre $U^\perp$.

   Solución:

   Base de U: $\{(1,0,-2,0)^T,(0,1,1,0)^T,(0,0,2,1)^T\}$.

   Base de $U^\perp$: $\{(2,-1,1,-2)^T\}$.

   Matriz de proyección sobre $U^\perp$: $Q=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

   Usando $P+Q=I$.

   Matriz de proyección sobre U: $P=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

   Proyección de v sobre U: Pv, proyección de v sobre $U^\perp$: Qv.

   $Pv=\frac{1}{10}(4,-2,22,16)^T$.

   $Qv=\frac{1}{10}(16,-8,8,-16)^T$.

6. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$, P matriz de proyección sobre U y Q matriz de proyección sobre $U^\perp$. Demuestre que PQ es la matriz nula.

   Solución:

   Manera 1:

Sea A tal que sus columnas forman una base de U. Entonces $P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

Sea B tal que sus columnas forman una base de $U^\perp$. Entonces $Q = B(B^TB)^{-1}B^T$.

Entonces $PQ = A(A^TA)^{-1}A^TB(B^TB)^{-1}B^T$.

Pero A^TB es la matriz nula, pues las filas de A^T son ortogonales a las columnas de B.

Entonces $PQ = 0$.

Manera 2:

Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base de U.

Sea $\{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de $U^\perp$.

Entonces si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r$.

$PQx = PQ(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r) = P(\vec{0} + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r) = \vec{0}$.

Luego $PQx = \vec{0}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces PQ es la matriz nula.

7. Sea $P = \begin{bmatrix} 6/7 & -2/7 & 1/7 & 1/7 \\ -2/7 & 3/7 & 2/7 & 2/7 \\ 1/7 & 2/7 & 6/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 & -1/7 & 6/7 \end{bmatrix}$ matriz de proyección sobre $U \leq \mathbb{R}^4$. Determine una base de U y de $U^\perp$.

Solución:

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\text{Im}(P) = C(P) = U$.

Entonces $U = \text{Gen}\{(1,0,0,1)^T, (0,1,0,2)^T, (0,0,1,-1)^T\}$.

O bien $U = \text{Gen}\{(6/7,-2/7,1/7,1/7)^T, (-2/7,3/7,2/7,2/7)^T, (1/7,2/7,6/7,-1/7)^T\}$.

$\text{Nul}(P) = U^\perp$.

Entonces $U^\perp = \text{Gen}\{(-1,-2,1,1)^T\}$.

Capítulo 9

Matrices Simétricas

Definición 9.1. Una matriz U de $n \times n$ es ortogonal si $U^T U = I$.

Ejemplo 9.2.

Teorema 9.3. Sea P de $n \times n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- U es ortogonal.
- $\|Ux\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- $Ux \cdot Uy = x \cdot y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es ortonormal, entonces $\{Uv_1, \ldots, Uv_m\}$ es ortonormal.

Demostración:

□

Ejemplo 9.4.

Proposición 9.5. Sea A simétrica. Entonces

- A tiene sólo valores propios reales.
- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A tal que $v_1 \in E_{\lambda_1}$ y $v_2 \in E_{\lambda_2}$, entonces $v_1 \cdot v_2 = 0$.

Demostración:

□

Ejemplo 9.6.

Definición 9.7. Una matriz A se dice ortogonalmente diagonalizable si existe U ortogonal y D diagonal, tal que $U^T AU = D$.

Ejemplo 9.8.

Teorema 9.9. A es simétrica si y sólo si A es ortogonalmente diagonalizable.

Ejemplo 9.10.

Corolario 9.11. A simétrica es definida positiva si y sólo si todos sus valores propios son positivos.

Demostración:

□

Ejemplo 9.12.

Definición 9.13. Si A es simétrica y $v_1, \ldots, v_n$ son vectores propios (ortonormales) asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces la descomposición espectral de A es:
$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \ldots + \lambda_n v_n v_n^T$.

Ejemplo 9.14.

Observación 9.15. Si A es de $n \times m$, se tiene que

1. $\text{Nul}(A^T A) = \text{Nul}(A)$.
2. $\text{Im}(A^T A) = \text{Im}(A^T)$.

Demostración:

□

Ejemplo 9.16.

Teorema 9.17. Sea A de $n \times m$. Entonces existen V de $m \times m$ y U de $n \times n$ matrices ortogonales tal que

$$U^T A V = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & s_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Observación 9.18. ¿Cómo obtener V?

La matriz $A^T A$ es simétrica y semi definida positiva. Entonces existe V de $m \times m$ matriz ortogonal tal que

$$V^T A^T A V = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times m} \quad \text{con } d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_r > 0.$$

Sea V_1 matriz de $m \times r$ que contiene vectores propios de valores propios no nulos y V_2 matriz de $m \times (m-r)$ que contiene los vectores propios del valor propio 0. Entonces se tiene que:

- $V = [V_1 \; V_2]$.
- Los vectores columna de V_1 forman una base de $\mathrm{Im}(A^T A) = \mathrm{Im}(A^T)$.
- Los vectores columna de V_2 forman una base de $\mathrm{Nul}(A^T A) = \mathrm{Nul}(A)$.
- $(AV_1)^T (AV_1) = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{bmatrix}_{n \times m}$

Observación 9.19. ¿Cómo obtener U?

Sea U_1 de $n \times r$ la matriz $U_1 = AV_1 \sqrt{D}^{-1}$.

Sea U_2 de $n \times (n-r)$ la matriz cuyas columnas completan una base ortogonal con las columnas de U_1.

Entonces se considera $U = [U_1 \; U_2]$.

Ejemplo 9.20. Finales

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Encuentre la descomposición espectral de A.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Determine la descomposición espectral de A.

   Solución:

   Valores propios: $3, 6$.

   $E_3 = \text{Gen}\{(1, 0, -1)^T, (0, 1, -1)^T\}$.

   $E_6 = \text{Gen}\{(1, 1, 1)^T\}$.

   Bases ortonormales:

   $E_3 = \text{Gen}\{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T, (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^T\}$.

   $E_6 = \text{Gen}\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^T\}$.

   Entonces la descomposición queda:

   $$A = 3 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & 4/6 & -2/6 \\ 1/6 & -2/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obterner la descomposición en valores singulares de A.

   Solución:

$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ con valores propios $\{4, 2, 0\}$.

$E_4 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}$, $E_2 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ y $E_0 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ con $V_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ y $V_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $\sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Entonces los valores singulares de A son: $\{2, \sqrt{2}\}$.

$U_1 = AV_1\sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ y $U_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ y entonces $U^TAV = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.