PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Solución Ayudantía 9 - MAT1203

1. Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_3$ y

$$H = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 : p(1) = p(2) = p(0)\}.$$

Determine una base y la dimensión de H.

Solución:
Sea

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3.$$

Las condiciones dicen

$$p(0) = a, \qquad p(1) = a + b + c + d, \qquad p(2) = a + 2b + 4c + 8d.$$

Pedir que $p(1) = p(0)$ y $p(2) = p(0)$ da el sistema

$$\begin{cases} a + b + c + d = a \\ a + 2b + 4c + 8d = a \end{cases} \implies \begin{cases} b + c + d = 0 \\ 2b + 4c + 8d = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $b = -c - d$. Sustituimos en la segunda:

$$2(-c - d) + 4c + 8d = 0 \implies -2c - 2d + 4c + 8d = 0 \implies 2c + 6d = 0 \implies c = -3d.$$

Con esto, de $b = -c - d$ obtenemos

$$b = -(-3d) - d = 3d - d = 2d.$$

Luego los coeficientes quedan determinados por los parámetros libres a y d:

22.jpg

$$a = a, \quad b = 2d, \quad c = -3d, \quad d = d.$$

Por tanto

$$p(x) = a + d(2x - 3x^2 + x^3).$$

Esto muestra que *todo* polinomio de H es combinación lineal de

$$1 \quad \text{y} \quad 2x - 3x^2 + x^3.$$

Además, estos dos son claramente linealmente independientes. Por lo tanto,

$$\boxed{\text{Una base de } H \text{ es } \{\, 1,\ 2x - 3x^2 + x^3 \,\}, \qquad \dim H = 2.}$$

2. Sea

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demuestre que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:
Formamos la matriz que tiene a los vectores como columnas:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Es una matriz triangular superior y su determinante es

$$\det(B) = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12 \neq 0.$$

Luego las columnas son linealmente independientes y, como hay 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, generan todo el espacio. Por tanto

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ es una base de } \mathbb{R}^3.}$$

b) Determine $\mathbf{x}$ tal que

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Solución:
Por definición de coordenadas en la base $\mathcal{B}$,

$$\mathbf{x} = -2\,\mathbf{b}_1 + 1\,\mathbf{b}_2 + (-3)\,\mathbf{b}_3.$$

Calculamos:

$$-2\,\mathbf{b}_1 = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 1\,\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -3\,\mathbf{b}_3 = -3 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 18 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Sumando:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 18 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 22 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\boxed{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -14 \\ 22 \\ -9 \end{bmatrix}.}$$

c) Encuentre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Solución:

Ahora $\mathbf{x}$ *ya viene* dada en la base estándar:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Buscamos escalares α, β, γ tales que

$$\alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 + \gamma\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Es decir,

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 3\gamma = -8 \\ 4\beta - 6\gamma = 2 \\ 3\gamma = 3 \end{cases}$$

De la tercera ecuación: $\gamma = 1$.

Sustituimos en la segunda:

$$4\beta - 6(1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 4\beta - 6 = 2 \quad \Longrightarrow \quad 4\beta = 8 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 2.$$

Sustituimos en la primera:

$$\alpha - 3(2) + 3(1) = -8 \quad \Longrightarrow \quad \alpha - 6 + 3 = -8 \quad \Longrightarrow \quad \alpha - 3 = -8 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -5.$$

Por lo tanto,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

3. Determine la dimensión del espacio columna y del núcleo de la matriz A cuya forma escalonada es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:
En la forma escalonada se observan **dos** filas no nulas, luego

$$(A) = 2.$$

El *espacio columna* tiene dimensión igual al rango, por lo tanto

$$\boxed{\dim(\text{Col}(A)) = 2.}$$

La matriz tiene 5 columnas; por el teorema rango-nulidad:

$$\dim(\text{Nul}(A)) = \text{número de columnas} - (A) = 5 - 2 = 3.$$

Luego

$$\boxed{\dim(\text{Nul}(A)) = 3.}$$

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demuéstrelo en general. Si es falsa, muestre un contraejemplo.

   a) Si existe un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ que genera a V, entonces $\dim V \leq p$.
   Solución:
   Sea V un espacio vectorial generado por p vectores. Toda base de V es un subconjunto linealmente independiente de un conjunto generador. Por el llamado *teorema de extracción de base*, de un conjunto generador finito se puede extraer una base y ésta nunca tiene más vectores que el conjunto generador. Por lo tanto, toda base de V tiene a lo más p vectores:

   $$\dim V \leq p.$$

   $$\boxed{\text{La afirmación es verdadera.}}$$

   b) Si $p \geq 2$ y $\dim V = p$, entonces cada conjunto de $p - 1$ vectores distintos de cero es linealmente independiente.
   Solución:
   La afirmación es *falsa*. Un contraejemplo sencillo: tome $V = \mathbb{R}^3$, entonces $\dim V = 3 = p$. Considere el conjunto de $p - 1 = 2$ vectores

   $$\{\,(1,0,0),\ (2,0,0)\,\}.$$

   Ambos vectores son *distintos de cero*, pero son *linealmente dependientes* porque

   $$(2,0,0) = 2(1,0,0).$$

   Por lo tanto, no es cierto que "cada" conjunto de $p - 1$ vectores no nulos sea LI.

   $$\boxed{\text{La afirmación es falsa.}}$$