PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Examen MAT1203 - 22 de julio

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo.

1. *a*) Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones. Si $Au = Av = b$ para vectores u, v no nulos y distintos, entonces hay una cantidad infinita de soluciones de $Ax = b$.

   Solución:

   Verdadero.

   Basta tomar el conjunto $\{u + \alpha(u - v)$ tal que $\alpha \in \mathbb{R}\}$.

   Este conjunto tiene una cantidad infinita de elementos pues $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Todos los elementos de este conjunto son soluciones del sistema $Ax = b$ pues:

$$\begin{aligned} A(\ u + \alpha(u - v)\ ) &= (\ Au\ ) + (\ A\alpha(u - v)\ ) \\ &= b + \alpha(\ A(u - v)\ ) \\ &= b + \alpha(\ Au - Av\ ) \\ &= b + \alpha(\ b - b\ ) \\ &= b + \alpha\ \vec{0} \\ &= b + \vec{0} \\ &= b \end{aligned} \quad .$$

b) Sea A una matriz de 3×2 inyectiva y $b \in \mathbb{R}^3$. Si $b \notin \text{Im}(A)$, entonces el conjunto

$$\left\{ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b \right\}$$

es linealmente independiente.

Solución:

Verdadero.

Sean α, β y γ en $\mathbb{R}$ tales que:

$\alpha\, A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\, b = \vec{0}$.

Por demostrar: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

• Si $\gamma \neq 0$, entonces se puede despejar:

$b = \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right) A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces $b = A\left(\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pero $b \notin \text{Im}(A)$, por lo tanto se llega a una contradicción y se tiene que $\gamma = 0$.

• Como $\gamma = 0$, reemplazando se tiene $\alpha\, A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Entonces $A\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \vec{0}$.

Luego $\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in \text{Nul}(A)$.

Pero A es inyectiva, es decir $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$.

Por lo tanto $\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \vec{0}$.

Igualando coordenadas $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

2. *a*) Sea A matriz no nula de 3×3. Si A es no invertible, entonces existe W subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión positiva y distinto de $\mathbb{R}^3$ tal que para todo $w \in W$ se cumple que $Aw \in W$.

Solución:

Verdadero.

Si se considera a $W = \text{Nul}(A)$ se tiene que:

• Es un subespacio.

• Como A es no invertible, entonces W no tiene dimensión 0.

• Como A es no nula, entonces $W \neq \mathbb{R}^3$.

• Por definición si $w \in \text{Nul}(A)$, entonces $Aw = \vec{0}$ y siempre es cierto que $\vec{0} \in \text{Nul}(A)$. Luego $Aw \in \text{Nul}(A)$.

b) Si $a > 0$, entonces la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & a-1 & 0 \\ a-1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

es positiva definida.

Solución:

Falso.

Los determinantes de las submatrices principales son:

$\text{Det}(A_1) = a$, $\text{Det}(A_2) = a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$ y $\text{Det}(A_3) = a(2a-1)$.

Si $a > 0$ entonces no necesariamente $2a - 1$ es mayor que cero. Por lo tanto A no necesariamente es positiva definida.

Otra forma es mostrar un contraejemplo. Para eso basta tomar $a = \dfrac{1}{4}$ y el vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En este caso $u^T Au = 2(2a-1) = -1 < 0$, luego no es positiva definida.

3. *a*) El conjunto $U = \{A$ matriz de 2×2 tal que A es diagonalizable $\}$ es un subespacio del espacio vectorial de las matrices de 2×2.

Solución:

Falso.

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable porque es triangular superior y tiene dos valores propios distintos: 1 y 2.

La matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable porque es diagonal y tiene dos valores propios distintos: -1 y -2.

La matriz $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es triangular superior y tiene sólo un valor propio: 0. Este valor propio tiene multiplicidad algebraica 2.

$\text{Nul}((A+B) - 0I) = \text{Nul}((A+B)) = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Luego el valor propio 2 tiene multiplicidad geométrica 1 y la matriz $A+B$ no es diagonalizable.

Por lo tanto el conjunto U no es cerrado bajo la suma y por lo tanto no es un subespacio.

b) La matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

Solución:

Falso.

$$\text{Det}(A - xI) = \text{Det} \begin{bmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ -1 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & 2-x \end{bmatrix} = (2-x)(x^2+1) = 0.$$

A tiene sólo el valor propio 2 con multiplicidad algebraica 1.

Como la multiplicidad geométrica es menor o igual a la algebraica, entonces el valor propio 2 tiene multiplicidad geométrica 1, pero la matriz es de 3×3. Luego A no es diagonalizable.

Otra forma de encontrar la multiplicidad geométrica es buscar E_2:

$$E_2 = \text{Nul} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Como } \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{se tiene } E_2 = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces la multiplicidad geométrica del valor propio 2 es 1, pero la matriz es de 3×3. Luego A no es diagonalizable.

4. *a*) La matriz de proyección sobre el hiperplano de ecuación $x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 = 0$ en $\mathbb{R}^5$ es

$$\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 11 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Verdadero.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 = 0 \right\}.$$

Entonces $H^\perp = \text{Gen}\left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Luego la matriz de proyección sobre $H^\perp$ es $Q = u(u^T u)^{-1}u^T$.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{12}(1 \ -3 \ 0 \ 1 \ -1) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 9 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente la matriz de proyección es

$$I - Q = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 11 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

• Forma 2: También es posible encontrar una base de H:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 = 0 \right\}.$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ con } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$H = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Entonces $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 11 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

b) Por ajuste de mínimos cuadrados, la recta que pasa más cerca de los puntos $(1, a)$, $(2, b)$ y $(3, c)$ es la recta de ecuación $y = mx + n$ donde $m = \dfrac{c-a}{2}$ y $n = \dfrac{4a+b-2c}{3}$.

Solución:

Verdadero.

La recta pedida de ecuación $y = mx + n$, es tal que m y n resuelven:

$$Min \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\|.$$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, entonces hay que resolver el sistema

$$A^T A \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Este sistema es: $\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c \\ a+b+c \end{pmatrix}$.

Luego $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a+2b+3c \\ a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{c-a}{2} \\ \\ \dfrac{4a+b-2c}{3} \end{pmatrix}$