Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

MAT1203 – Álgebra Lineal

Solución Examen

11. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Determine, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ sea

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -a & 3 & b \\ 0 & b & -2 \end{bmatrix}.$$

Forma 1. $a = 1$ y $b = 2$

Forma 2. $a = 2$ y $b = 1$

Forma 3. $a = -1$ y $b = 2$

Forma 4. $a = 1$ y $b = -2$

Forma 5. $a = -1$ y $b = -2$

Solución. Tenemos que

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\-a\\0\end{bmatrix} \iff T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-a)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-a\\-a\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}a\\3\\b\end{bmatrix} \iff T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = (a)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (b)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b+3\\b+3\\b\end{bmatrix}$$

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\b\\-2\end{bmatrix} \iff T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (b)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b-2\\b-2\\-2\end{bmatrix}$$

Como $\mathcal{B}$ es una base entonces todo vector en $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los elementos de la base, resolviendo el sistema se obtiene que:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = (x-y)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (y-z)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Entonces, usando que T es una transformación lineal se obtiene que:

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} &= (x-y)T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (y-z)T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + zT\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \\ &= (x-y)\begin{bmatrix}1-a\\-a\\0\end{bmatrix} + (y-z)\begin{bmatrix}a+b+3\\b+3\\b\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}b-2\\b-2\\-2\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}(1-a)x + (2a+b+2)y + (-a-5)z\\-ax + (a+b+3)y - 5z\\by + (-b-2)z\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Forma 1. $a = 1$, $b = 2$ entonces $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6y-6z\\-x+6y-5z\\2y-4z\end{bmatrix}$.

Forma 2. $a = 2$ y $b = 1$ entonces $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x+7y-7z\\-2x+6y-5z\\y-3z\end{bmatrix}$.

Forma 3. $a = -1$ y $b = 2$ entonces $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+2y-4z\\x+4y-5z\\2y-4z\end{bmatrix}$.

Forma 4. $a = 1$ y $b = -2$ entonces $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2y-6z\\-x+2y-5z\\-2y\end{bmatrix}$.

Forma 5. $a = -1$ y $b = -2$ entonces $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x-2y-4z\\x-5z\\-2y\end{bmatrix}$.

Puntaje Pregunta 11.

- 2 puntos por obtener los valores de la transformación lineal T en la base $\mathcal{B}$.
- 2 puntos por determinar los escalares que permiten escribir los vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de la base $\mathcal{B}$.
- 2 puntos por obtener explícitamente la transformación T.

12. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+bz\\ay+cz\\cz\end{bmatrix}$.

a) Demuestre que T es diagonalizable.

b) Determine una base $\mathcal{B}$ de vectores propios y $[T]_{\mathcal{B}}$.

Forma 1. $a=1$, $b=1$ y $c=2$

Forma 2. $a=1$, $b=-1$ y $c=2$

Forma 3. $a=-1$, $b=1$ y $c=1$

Forma 4. $a=-1$, $b=-1$ y $c=1$

Forma 5. $a=2$, $b=1$ y $c=1$

Solución.

a) El polinomio característico de la matriz que representa a la transformación lineal T es

$$P_T(\lambda)=\begin{vmatrix}a-\lambda & 0 & b\\ 0 & a-\lambda & c\\ 0 & 0 & c-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)^2(c-\lambda)$$

Los espacios propios asociados a los valores propios $\lambda_1=a$ y $\lambda_2=c$ son

$$E_{\lambda_1}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\quad\text{y}\quad E_{\lambda_2}=\left\{\begin{bmatrix}\frac{b}{c-a}\\ \frac{c}{c-a}\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Como la dimensión del espacio propio para cada λ_k es igual a la multiplicidad de λ_k se sigue que la transformación T es diagonalizable.

b) La base de vectores propios es $\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{b}{c-a}\\ \frac{c}{c-a}\\1\end{bmatrix}\right\}$ y se tiene que

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&c\end{bmatrix}.$$

Puntaje pregunta 12.

- 1 puntos por determinar los valores propios de la matriz que representa a T.
- 2 puntos por determinar los espacios propios.
- 2 punto por justificar que T es diagonalizable.
- 1 puntos por determinar $[T]_{\mathcal{B}}$.

13. Considere el subespacio vectorial $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \ : \ x - ay - bz = 0 \right\}$.

Forma 1. $a = 1$ y $b = 1$ **Forma 3.** $a = -1$ y $b = 1$ **Forma 5.** $a = 2$ y $b = 1$

Forma 2. $a = 1$ y $b = -1$ **Forma 4.** $a = -1$ y $b = -1$

a) Demuestre que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ -ab \\ a^2+1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de W.

b) Determine la proyección ortogonal del vector $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en W.

c) Determine la distancia del vector $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ al subespacio W.

Solución.

a) Note que los vectores de $\mathcal{B}$ son ortogonales luego es un conjunto linealmente independiente. Cada vector de $\mathcal{B}$ pertenece a W y como W tiene dimensión 3 se sigue que $\mathcal{B}$ es una base.

b) Considere $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ entonces la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ en W es

$$\begin{aligned} \text{proy}_W x &= \frac{x \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{x \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \frac{x \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3 \\ &= \frac{ax_1 + x_2}{a^2+1} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{bx_1 - abx_2 + (a^2+1)x_3}{b^2 + a^2b^2 + (a^2+1)^2} \begin{bmatrix} b \\ -ab \\ a^2+1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ((a^2+b^2)x_1 + ax_2 + bx_3)/(a^2+b^2+1) \\ (ax_1 + (b^2+1)x_2 - abx_3)/(a^2+b^2+1) \\ (bx_1 - abx_2 + (a^2+1)x_3)/(a^2+b^2+1) \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Forma 1. $a = 1$, $b = 1$ entonces $\text{proy}_W x = \begin{bmatrix} (2x_1 + x_2 + x_3)/3 \\ (x_1 + 2x_2 - x_3)/3 \\ (x_1 - x_2 + 2x_3)/3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Forma 2. $a = 1$ y $b = -1$ entonces $\text{proy}_W x = \begin{bmatrix} (2x_1 + x_2 - x_3)/3 \\ (x_1 + 2x_2 + x_3)/3 \\ (-x_1 + x_2 + 2x_3)/3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Forma 3. $a = -1$ y $b = 1$ entonces $\text{proy}_W x = \begin{bmatrix} (2x_1 - x_2 + x_3)/3 \\ (-x_1 + 2x_2 + x_3)/3 \\ (x_1 + x_2 + 2x_3)/3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Forma 4. $a = -1$ y $b = -1$ entonces $\text{proy}_W x = \begin{bmatrix} (2x_1 - x_2 - x_3)/3 \\ (-x_1 + 2x_2 - x_3)/3 \\ (-x_1 - x_2 + 2x_3)/3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Forma 5. $a = 2$ y $b = 1$ entonces $\text{proy}_W x = \begin{bmatrix} (5x_1 + 2x_2 + x_3)/6 \\ (2x_1 + 2x_2 - 2x_3)/6 \\ (x_1 - 2x_2 + 5x_3)/6 \\ x_4 \end{bmatrix}$

c) Sabemos que $d(x, W) = \|x - \text{proy}_W x\|$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x - \text{proy}_W x\| &= \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ((a^2+b^2)x_1 + ax_2 + bx_3)/(a^2+b^2+1) \\ (ax_1 + (b^2+1)x_2 - abx_3)/(a^2+b^2+1) \\ (bx_1 - abx_2 + (a^2+1)x_3)/(a^2+b^2+1) \\ x_4 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} (x_1 - ax_2 - bx_3)/(a^2+b^2+1) \\ -a(x_1 - ax_2 - bx_3)/(a^2+b^2+1) \\ -b(x_1 - ax_2 - bx_3)/(a^2+b^2+1) \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_1 - ax_2 - bx_3}{a^2+b^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-a(x_1 - ax_2 - bx_3)}{a^2+b^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-b(x_1 - ax_2 - bx_3)}{a^2+b^2+1}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} |x_1 - ax_2 - bx_3|
\end{aligned}$$

Forma 1. $a = 1$, $b = 1$ entonces $\|x - \text{proy}_W x\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} |x_1 - x_2 - x_3|$.

Forma 2. $a = 1$ y $b = -1$ entonces $\|x - \text{proy}_W x\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} |x_1 - x_2 + x_3|$.

Forma 3. $a = -1$ y $b = 1$ entonces $\|x - \text{proy}_W x\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} |x_1 + x_2 - x_3|$.

Forma 4. $a = -1$ y $b = -1$ entonces $\|x - \text{proy}_W x\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} |x_1 + x_2 + x_3|$.

Forma 5. $a = 2$ y $b = 1$ entonces $\|x - \text{proy}_W x\| = \dfrac{1}{\sqrt{6}} |x_1 - 2x_2 - x_3|$.

Puntaje Pregunta 13.

- 2 puntos por mostrar que $\mathcal{B}$ es base de W.
- 2 puntos por determinar la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ en W.
- 2 puntos por determinar la distancia de un vector de $\mathbb{R}^4$ sobre W.