PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Interrogación 3 MAT1203 - 1 de julio

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo.

1. *a*) El conjunto $U = \{A \text{ matriz de } 2 \times 2 \text{ tal que } \text{Det}(A) = 0\}$ es un subespacio del espacio vectorial de las matrices de $2 \times 2$.

   **Solución**:

   Falso.

   Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   $\text{Det}(A) = 0$, $\text{Det}(B) = 0$, luego $A \in U$ y $B \in U$, pero $\text{Det}(A + B) = 1$ y $(A + B) \notin U$.

   Entonces $U$ no es cerrado bajo la suma, y no es un subespacio del espacio vectorial de las matrices de $2 \times 2$.

   *b*) Si $U$ y $W$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión dos, entonces $U = W$.

   **Solución**:

   Falso.

   Sea $U = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $W = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   $U$ y $W$ tienen dimensión dos (porque estn generados por dos vectores canónicos L.I.

   Pero $U \neq W$ pues, por ejemplo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, pero $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ porque los tres vectores canónicos son L.I.

2. *a*) Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Si $P$ es la matriz cambio de base tal que para todo $u \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$P[u]_{B_1} = [u]_{B_2},$$

entonces $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**Solución**:

Falso.

Si $P[u]_{B_1} = [u]_{B_2}$,, entonces las columnas de $P$ son los vectores coordenados de los elementos de la base $B_1$ con respecto a la base $B_2$.

Por ejemplo la primera columna de $P$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ debe ser tal que:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ lo que no es cierto.

*b*) Si $T : M_{3\times 3} \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal, entonces $T$ no puede ser inyectiva.

**Solución**:

Verdadero.

Si $T$ fuera inyectiva, entonces $\operatorname{Dim} \operatorname{Nul}(T) = 0$.

Además $\operatorname{Dim} M_{3\times 3} = 9$, luego reemplazando en

$\operatorname{Dim} M_{3\times 3} = \operatorname{Dim} \operatorname{Im}(T) + \operatorname{Dim} \operatorname{Nul}(T)$

se obtiene $9 = \operatorname{Dim} \operatorname{Im}(T)$, lo que sería un contradicción pues $\operatorname{Dim} \operatorname{Im}(T) \leq \operatorname{Dim} \mathbb{R}^4 = 4$.

Por lo tanto $T$ no puede ser inyectiva.

3. *a*) Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2\}$ bases de los espacios vectoriales $V$ y $W$ respectivamente. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = 2w_2$ y $T(v_3) = w_1 - w_2$, entonces para todo $v \in V$, el vector coordenado de $T(v)$ con respecto a $B_2$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} [v]_{B_1}.$$

**Solución**:

Verdadero.

Dado un elemento $v \in V$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base $B_1$.

Sea $v = av_1 + bv_2 + cv_3$ para únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Entonces el vector coordenado de $v$ con respecto a $B_1$ es el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Aplicando la transformación lineal $T$ se obtiene:
$T(v) = T(av_1 + bv_2 + cv_3) = aT(v_1) + bT(v_2) + cT(v_3)$.

Reemplazando las imágenes de los elementos de la base $B_1$ se obtiene:

$T(v) = a(w_1) + b(2w_2) + c(w_1 - w_2)$.

Reeordenando se tiene:

$T(v) = (a + c)(w_1) + (2b - c)(w_2)$.

Entonces el vector coordenado de $T(v)$ con respecto a la base $B_2$ es el vector:

$\begin{bmatrix} a + c \\ 2b - c \end{bmatrix}$.
Este último vector es el producto pedido:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} [v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ 2b - c \end{bmatrix}$.

*b*) Sea $A$ una matriz tal que $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Si la suma de las columnas de $A$ es $\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, entonces $A$ es diagonalizable.

**Solución**:

Verdadero.

Del enunciado se tiene:

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$
$$A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$
$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Además el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es L.I. pues la siguiente matriz tiene determinante 1:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Entonces hay una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$: dos vectores propios L.I. asociados al valor propio 0 y un vector propio L.I. asociado al valor propio 3. Por lo tanto la matriz es diagonalizable.

4. *a*) Sea $u \in \mathbb{R}^3$ unitario. Si $A$ es la matriz de $3\times3$ dada por $A = uu^T$, entonces $A$ tiene los valores propios 1 y 0 con multiplicidad geométrica 1 y 2 respectivamente.

**Solución**:

Verdadero.

Primero se observa que $A$ tiene rango 1 porque todas sus filas son múltiplos de $u^T$. Entonces la dimensión de $\mathrm{Im}(A) = 1$.

Por lo tanto $\mathrm{Nul}(A)$ tiene dimensión 2.

Sea $w_1, w_2$ una base de $\mathrm{Nul}(A)$, entonces $Aw_1 = \vec{0} = (0)w_1$ y $Aw_2 = \vec{0} = (0)w_2$.

Luego $A$ tiene el valor propio 0 con multiplicidad geométrica 2.

Por otro lado $Au = uu^Tu = u(1) = u = (1)u$, por lo tanto $u$ es vector propio asociado al valor propio 1. Entonces 1 tiene multiplicidad geométrica al menos 1.

Pero $A$ es de $3\times3$ y el valor propio 0 tiene multiplicidad geométrica 2, entonces el valor propio 1 tiene multiplicidad geométrica máxima $3 - 2 = 1$.

Luego el valor propio 1 tiene multiplicidad geométrica exactamente 1.

*b*) La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

**Solución**:

Verdadero.

Para obtener los valores propios se calcula $\mathrm{Det}(A - xI)$.

$$\mathrm{Det}(A - xI) = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 3-x & 0 \\ -1 & 0 & 4-x \end{bmatrix} = -(x-2)(x-3)^2.$$

El espacio propio asociado al valor propio 2 es:

$$E_2 = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces el valor propio 2 tiene multiplicidad geométrica 1.

El espacio propio asociado al valor propio 3 es:

$$E_3 = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces el valor propio 3 tiene multiplicidad geométrica 2.

Como la suma de las multipliciades es 3, entonces $A$ es diagonalizable.

Nota: También es válido no obtener los vectores propios de manera explícita y sólo contar el rango de las matrices $A-2I$ y $A-3I$. O contar primero el rango de $A-3I$ (u obtener que 2 es la m.g. del valor propio 3) y dado que la matriz es de $3 \times 3$ deducir que el valor propio 2 tiene m.g. 1.