

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ALGEBRA LINEAL

PROBLEMAS RESUELTOS

Rodrigo Vargas

Santiago de Chile
2007

Prefacio

Este libro con problemas resueltos pretende sirvir para los estudiantes del plan común de Ingeneria Civil de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Así espero facilitar el estudio y la comprensión de los estudiantes. Grupos especiales, estudiantes avanzados, lectores que deseen una presentación más completa y los alumnos, por así decirlo, normales que busquen lecturas complementarias pueden consultar el libro "Linear Algebra" de Hoffman y Kunze que trata los mismos tópicos con un enfoque más amplio.

La parte mas importante de este libro son sus problemas resueltos, que sirven para fijar ideas, desarrollar algunos temas esbozados en muchos textos de algebra lineal y como oportunidad para que el lector compruebe lo sencillo de algunas soluciones. Naturalmente, me gustaría que el lector sólo consultase las soluciones después de haber hecho un serio esfuerzo para resolver cada problema. Precisamente es este esfuerzo, con o sin éxito, el que nos conduce a buenos resultados en el proceso de aprendizaje.

Los problemas que el lector encontrará se basan en las ayudantias del curso de algebra lineal impartido en la Pontificia Universidad Católica de Chile, el cual está dirigido a estudiantes de Ingeneria Civil.

Índice general

1. Algebra Lineal Elemental **1**

2. Factorizaciones de Matrices **21**

3. Determinantes **43**

4. Espacios Vectoriales **49**

5. Transformaciones Lineales, Teorema de la Dimensión y Cambio de Base **61**

6. Bases Ortonormales y Proyecciones **79**

7. Vectores y Valores Propios, Diagonalización **85**

Capítulo 1

Algebra Lineal Elemental

1.1. Se dice que v es combinación lineal convexa de $u_1, u_2, ..., u_k$ si $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k$ donde $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., k$ y $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = 1$. Demuestre que si u_4 es combinación convexa de u_1, u_2, u_3 y v es combinación convexa de u_1, u_2, u_3, u_4 entonces v es combinación convexa de u_1, u_2, u_3.

Solución: Si u_4 es combinación convexa de u_1, u_2, u_3, entonces

$$u_4 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \, ,$$

donde $\sum \alpha_i = 1$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, 3$. Si v es combinación convexa de u_1, u_2, u_3, u_4, entonces

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4 \, ,$$

donde $\sum \beta_i = 1$ y $\beta_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, 4$. Luego,

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4 \\ &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) \\ &= (\beta_1 + \beta_4\alpha_1)u_1 + (\beta_2 + \beta_4\alpha_2)u_2 + (\beta_3 + \beta_4\alpha_3)u_3 \\ &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 \end{aligned}$$

donde $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_4\alpha_1 \geq 0$, $\gamma_2 = \beta_2 + \beta_4\alpha_2 \geq 0$ y $\gamma_3 = \beta_3 + \beta_4\alpha_3 \geq 0$. Además,

$$\begin{aligned} \sum \gamma_i &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\ &= \beta_1 + \beta_4\alpha_1 + \beta_2 + \beta_4\alpha_2 + \beta_3 + \beta_4\alpha_3 \\ &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \, . \end{aligned}$$

Por lo tanto, v es combinación convexa de u_1, u_2, u_3.

1.2. Demuestre que si $u_1 = 2v_1 + 3v_2$, $u_2 = -v_1 + 3v_2$ entonces se cumple que: $< u_1, u_2 >=< v_1, v_2 >$.

Solución: Primero probaremos que $< u_1, u_2 > \subset < v_1, v_2 >$. Para esto, sea $x \in < u_1, u_2 >$ entonces

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \\ &= \alpha_1(2v_1 + 3v_2) + \alpha_2(-v_1 + 3v_2) \\ &= (2\alpha_1 - \alpha_2)v_1 + 3(\alpha_1 + \alpha_2)v_2 \, . \end{aligned}$$

Como x es combinación lineal de los v_i', es claro que $x \in < v_1, v_2 >$ y, por lo tanto, hemos probado que

$$< u_1, u_2 > \subset < v_1, v_2 > \, .$$

Ahora se probará que $< v_1, v_2 > \subset < u_1, u_2 >$. Notemos que:

$$u_1 = 2v_1 + 3v_2 \Rightarrow 3v_2 = u_1 - 2v_1$$

y

$$u_2 = -v_1 + 3v_2 \Rightarrow 3v_2 = u_2 + v_1 \, .$$

Igualando obtenemos que

$$\begin{aligned} u_1 - 2v_1 &= u_2 + v_1 \\ 3v_1 &= u_1 - u_2 \\ v_1 &= \frac{1}{3}(u_1 - u_2) \, . \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$v_2 = \frac{1}{9}(u_1 + 2u_2) \, .$$

Sea $x \in < v_1, v_2 >$, este vector se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} x &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \\ &= \beta_1 \frac{1}{3}(u_1 + u_2) + \beta_2 \frac{1}{3} u_1 \\ &= \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2)u_1 + \frac{1}{3}\beta_1 u_2 \, . \end{aligned}$$

Como x es combinación lineal de los u_i', es claro que $x \in < u_1, u_2 >$ y, por lo tanto, hemos probado que

$$< v_1, v_2 > \subset < u_1, u_2 >$$

y por lo tanto, $< u_1, u_2 >=< v_1, v_2 >$.

1.3. Sean

$$u = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule los productos puntos $u \cdot v$, $u \cdot w$, $w \cdot v$.

(b) Determine la longitud de cada uno de los vectores.

(c) Verifique las desigualdades (Schwarz):

$$|\, u \cdot v| \leq \|u\|\|v\| \quad \text{y} \quad |\, v \cdot w| \leq \|v\|\|w\|\,.$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (-0.6, 0.8) \cdot (3, 4) = (-0.6)(3) + (0.8)(4) = 1.4\,, \\ u \cdot w &= (-0.6, 0.8) \cdot (4, 3) = (-0.6)(4) + (0.8)(3) = 0\,, \\ w \cdot v &= (4, 3) \cdot (3, 4) = (4)(3) + (3)(4) = 24\,. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{(-0.6)^2 + (0.8)^2} = 1\,, \\ \|v\| &= \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5\,, \\ \|w\| &= \sqrt{w \cdot w} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5\,. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} |\, u \cdot v| &= |1.4| = 1.4 \leq 5 = (1)(5) = \|u\|\|v\|\,, \\ |\, v \cdot w| &= |24| = 24 \leq 25 = (5)(5) = \|v\|\|w\|\,. \end{aligned}$$

1.4. Para $u = (1, 2)$, $v = (-1, 3)$ determine un escalar α tal que $u - \alpha v$ sea perpendicular a u.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned} u - \alpha v &= (1, 2) - \alpha(-1, 3) \\ &= (1 + \alpha, 2 - 3\alpha)\,. \end{aligned}$$

Para que los vectores sean perpendiculares basta que el producto interno entre los vectores sea cero

$$\begin{aligned} 0 &= u \cdot (u - \alpha v) \\ &= (1, 2) \cdot (1 + \alpha, 2 - 3\alpha) \\ &= 1(1 + \alpha) + 2(2 - 3\alpha) \\ &= 5 - 5\alpha\,. \end{aligned}$$

Entonces, $\alpha = 1$ y tenemos que $u - \alpha v = (2, -1)$.

1.5. Exprese el plano $x + y + 2z = 1$ como combinación lineal de vectores. Indique el vector normal unitario al plano.

Solución: Podemos despejar cualquiera de las variables de la ecuación del plano en función de las otras dos. Por ejemplo, podemos despejar x y obtenemos $x = 1 - y - 2z$ en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \, .$$

Se puede observar que el plano se puede expresar como combinación lineal de los vectores $(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)$, donde el primer vector siempre esta ponderado por 1, esto es

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \, .$$

En general, el vector normal de un plano $ax + by + cz = d$ es (a, b, c), en nuestro caso el vector normal es $\vec{n} = (1, 1, 2)$ con modulo

$$\| \vec{n} \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \, .$$

Luego, el vector normal unitario es:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2) \, .$$

1.6. Si un hiperplano pasa por los puntos $(1, -1, 1, 1)$, $(2, -1, 2, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$. Determine los valores α, β tal que el punto $(\alpha, \beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta)$ pertenezca al hiperplano.

Solución: La ecuación de un plano en $\mathbb{R}^4$ es:

$$ax + by + cz + dw = e \, .$$

Como el hiperplano pasa por los puntos $(1, -1, 1, 1)$, $(2, -1, 2, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$ las constantes a, b, c, d, e deben cumplir

$$\begin{aligned} a - b + c + d &= e \, , \\ 2a - b + 2c + d &= e \, , \\ b + c + d &= e \, , \\ a + d &= e \, . \end{aligned}$$

Entonces tenemos 4 ecuaciones y 5 incognitas. Hay una variable libre que es e y a, b, c, d son variables básicas. Resolviendo el sistema obtenemos

$$a = b = c = 0, \quad d = e\,.$$

La ecuación del hiperplano es entonces:

$$dw = d \Rightarrow w = 1\,.$$

Luego, para que $(\alpha, \beta, \alpha - \beta, \alpha + \beta)$ pertenezca al hiperplano se debe cumplir que:

$$\alpha + \beta = 1\,.$$

1.7. ¿Para qué valor(es) de λ serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix}$?

Solución: Suponga que

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Entonces mulptiplicando y sumando se obtiene

$$\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 2c_1 - c_2 + \lambda c_3 \\ 3c_1 + 4c_2 + 4c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Esto nos lleva al sistema de tres ecuaciones y tres incognitas

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0\,, && (1.1)\\ 2c_1 - c_2 + \lambda c_3 &= 0\,, && (1.2)\\ 3c_1 + 4c_2 + 4c_3 &= 0\,. && (1.3) \end{aligned}$$

Así, los vectores serán linealmente dependientes si y sólo si el sistema tiene soluciones no triviales. Despejando en (1.1)

$$c_1 = -2c_2 - 2c_3\,. \tag{1.4}$$

Si (1.4) en (1.3) y despejando

$$c_2 = -\frac{5c_3}{2}\,. \tag{1.5}$$

Si (1.5) en (1.4) obtenemos

$$c_1 = 2c_3\,. \tag{1.6}$$

Finalmente (1.5) y (1.6) en (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 + \lambda c_3 &= 0 \\ 2(2c_3) + \frac{5}{2}c_3 + \lambda c_3 &= 0 \\ (\lambda + \frac{13}{2})c_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Para obtener infinitas soluciones necesitamos que una de las ecuaciones se anule esto se consigue con $\lambda = -\frac{13}{2}$, con este valor los vectores son linealmente dependientes.

1.8. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1\,, \\ x_1 - 2x_2 + ax_3 &= b\,, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= c\,, \end{aligned}$$

donde a, b, c son constantes. Determine los valores de a, b, c tales que el sistema: no tenga solución, tenga solución única, tenga infinitas soluciones.

Solución: Primeros hacemos eliminación de Gauss

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & a-1 & b-1 \\ 0 & -1 & 1 & c-2 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1-a) & \frac{1}{3}(1-b) \\ 0 & -1 & 1 & c-2 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+\frac{1}{3}(a-1) & \frac{1}{3}(b-1)+1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(1-a) & \frac{1}{3}(1-b) \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(4-a) & \frac{1}{3}(3c-b-5) \end{array}\right)\,. \end{aligned}$$

La última fila de la matriz ampliada equivale a

$$\frac{1}{3}(4-a)x_3 = \frac{1}{3}(3c-b-5) \quad \Rightarrow \quad (4-a)x_3 = 3c-b-5\,.$$

Para que no haya soluciones es necesario que el sistema sea inconsistente, es decir, que algunas de sus ecuaciones contenga alguna contradicción. La única posible es $0 \cdot x_3 \neq 0$. Es decir, con $a = 4$ y $3c - b - 5 \neq 0$.
Para que existan infinitas soluciones se necesita una identidad que se cumpla siempre. La única que se cumple siempre independiente del valor de x_3 es $0 \cdot x_3 = 0$. Es decir, con $a = 4$ y $3c - b - 5 = 0$.
Si se quiere una sola solución, se debe tener tantas ecuaciones linealmente independientes como incognitas y además el sistema debe ser consistente. Esto se cumple para cualquier valor de a, b, c excepto para el valor $a = 4$.

1.9. Encuentre eficientemente la solución general de los sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Solución: Con el método de eliminación de Gauss es posible resolver múltiples sistemas con la misma matriz de coeficientes y distintos vectores a la vez. Para esto se construye una matriz ampliada de la forma $[\, A \mid \vec{b_1} \ldots \vec{b_n} \,]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Una vez obtenida la matriz escalonada reducida, se debe despejar las incógnitas del primer y segundo sistema a partir de las columnas correspondientes a los vectores $(2, 3, 4)$ y $(2, 3, 5)$, respectivamente. En este caso el segundo sistema es inconsistente, es decir no tienen soluciones, ya que tenemos $0 \cdot x_3 = 1$. Para el segundo sistema tenemos infinitas soluciones dadas por

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 - x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}\,.$$

1.10. Determine un sistema de ecuaciones $Ax = b$ tal que su conjunto solución sea:

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Solución: El conjunto solución de $Ax = b$ es $x_0 + kerA$, donde x_0 es una solución particular de $Ax = b$. Además $KerA = \langle$ filas de A$\rangle^{\perp}$. Entonces

$$KerA = \langle (-1, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 0) \rangle .$$

Sea (a, b, c, d) una fila de A, entonces:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad y \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -a + d = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ c = a + b \end{cases} .$$

Tomando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (a = 0, & b = 1) \\ (a = 1, & b = 0) \end{matrix}$. Ahora sea

$$b = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Eligiendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = (2, 3)$ el conjunto de $Ax = b$ coincide con

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

1.11. Considere el plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\}$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Demuestre que la imagen de $\mathcal{P}$ a través de A es un plano y encuentre la ecuación cartesiana $ax + by + cz = d$ de tal plano.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\} \\
&= \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : z = 3y - 2x\} \\
&= \{(x,y,3y-2x) : x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,0,-2x) + (0,y,3y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(1,0,-2)x + (0,1,3)y : x,y \in \mathbb{R}\}\,.
\end{aligned}$$

Los vectores $(1,0,-2)$ y $(0,1,3)$ son linealmente independientes, ya que

$\alpha(1,0,-2)+\beta(0,1,3) = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha,\beta,-2\alpha+3\beta) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$

Luego, $\mathcal{P} = \langle\{(1,0,-2),(0,1,3)\}\rangle = \langle\{\vec{v},\vec{w}\}\rangle$

$$\begin{aligned}
A\vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,, \\
A\vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la imagen de $\mathcal{P}$ a través de A es generado por vectores $(-3,0,-1)$ y $(5,3,4)$, esto es

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{P}) &= \langle\{(-3,0,-1),(5,3,4)\}\rangle \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(-3,0,-1) + \beta(5,3,4) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (-3\alpha+5\beta, 3\beta, -\alpha+4\beta) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3\alpha+5\beta,\ y = 3\beta,\ z = -\alpha+4\beta \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 7y - 9z = 0\}\,.
\end{aligned}$$

1.12. Considere la siguiente matriz triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}\,.$$

Encuentre A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 2p & 1 \\ 0 & p^2 & 2p \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}, \\
A^3 &= \begin{pmatrix} p^2 & 2p & 1 \\ 0 & p^2 & 2p \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^3 & 3p^2 & 3p \\ 0 & p^3 & 3p^2 \\ 0 & 0 & p^3 \end{pmatrix}, \\
A^4 &= \begin{pmatrix} p^3 & 3p & 3p \\ 0 & p^3 & 3p^2 \\ 0 & 0 & p^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^4 & 4p^3 & 6p^2 \\ 0 & p^4 & 4p^3 \\ 0 & 0 & p^4 \end{pmatrix}, \\
A^5 &= \begin{pmatrix} p^4 & 4p^3 & 6p^2 \\ 0 & p^4 & 4p^3 \\ 0 & 0 & p^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^5 & 5p^4 & 10p^3 \\ 0 & p^5 & 5p^4 \\ 0 & 0 & p^5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego, $A^n = \begin{pmatrix} p^n & np^{n-1} & a_n p^{n-2} \\ 0 & p^n & np^{n-1} \\ 0 & 0 & p^n \end{pmatrix}$ donde $a_{n+1} = a_n + (n-1), \forall n > 1$ y $a_1 = 0$.

1.13. Demuestre que cualquier matriz cuadrada se puede escribir de manera única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

Solución: Se dice que una matriz es simétrica si $A^t = A$ y se dice que una matriz es antisimétrica si $A^t = -A$. Consideremos las matrices $\frac{1}{2}(A + A^t)$ y $\frac{1}{2}(A - A^t)$ entonces

$$[\frac{1}{2}(A + A^t)]^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t).$$

Luego, $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es una matriz simétrica.

$$[\frac{1}{2}(A - A^t)]^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t).$$

Luego, $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es un matriz antisimétrica. Por lo tanto, podemos escribir A como

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

1.14. Resuelva la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}.$$

Solución: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$ y notemos que si existen las matrices inversas de A y B, entonces

$$\begin{aligned} AXB = C &\Rightarrow AXBB^{-1} = CB^{-1} \\ &\Rightarrow AX = CB^{-1} \\ &\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}CB^{-1} \\ &\Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}\,. \end{aligned}$$

Usando eliminación de Gauss, podemos encontrar A^{-1} y B^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

y

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.15. Sea A de 2×2 tal que $A(1,0)^\top = (3,6)^\top$ y $A(0,1)^\top = (1,2)^\top$

(a) Mostrar que la imagen bajo A de la recta $3x + 2y = 0$ es la recta $2x - y = 0$.

(b) Hay una recta L que pasa por el origen y que queda fija bajo A, (es decir, $A(L) = L$, aunque no necesariamente $A(l) = l$, para $l \in L$). ¿Cuál es la recta?

Solución:

(a) Si $A = (a_{ij})$ entonces

$$A(1,0)^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$A(0,1)^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. Buscamos el vector generador de la recta $3x + 2y = 0$

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{3}{2}x\} \\ &= \left\{ \left(x, -\frac{3}{2}x\right) : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x\left(1, -\frac{3}{2}\right) : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \left\{ \left(1, -\frac{3}{2}\right) \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

y obtenemos

$$A(1,-3/2)^\top = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces la imagen de bajo A de la recta es:

$$\begin{aligned} A(L) &= \left\langle \left\{ \left(\frac{3}{2}, 3\right) \right\} \right\rangle \\ &= \left\{ \alpha\left(\frac{3}{2}, 3\right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{y}{2} \right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}. \end{aligned}$$

(b) Si L es la recta que pasa por el origen entonces consideremos

$$\begin{aligned} L &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\} \\ &= \{(x,mx) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \{(1,m)\} \rangle. \end{aligned}$$

Entonces, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+m \\ 6+2m \end{pmatrix}$ y

$$\begin{aligned} A(L) &= \langle\{(3+m, 6+2m)\}\rangle \\ &= \{((3+m, 6+2m) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}\,. \end{aligned}$$

Si consideremos la recta

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$$

entonces $A(L) = L$.

1.16. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Se define la traza de A, denotada por $tr(A)$, como

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\,.$$

Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, demuestre

(a) $tr(AB) = tr(BA)$.

(b) $tr(AA^t) > 0$, si $A \neq 0$.

Solución:

(a) Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$ y $BA = (d_{ij})$ entonces un elemento de la diagonal de la matriz AB es

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\,,$$

luego,

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = tr(BA)\,. \end{aligned}$$

(b) Si $A = (a_{ij})$ entonces $A^t = (b_{ij}) = (a_{ji})$ si denotamos $AA^t = (r_{ij})$ entonces:

$$tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{n} r_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ki})^2 > 0.$$

1.17. Si $\tan\alpha = (a/b)$, demuestre que

$$\begin{bmatrix} 1 & (a/b) \\ -(a/b) & 1 \end{bmatrix}^n = \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{n/2} \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}.$$

Solución: Demostramos la igualdad haciendo inducción sobre n
Para $n = 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} &= \left(1+\tan^2\alpha\right)^{1/2} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \sec\alpha \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (a/b) \\ -(a/b) & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora suponiendo que se cumple para n, probamos que es válido para $n+1$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ -\frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ -\frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ -\frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{n/2} \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ -\frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1+\tan^2\alpha)^{n/2} \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\sec^2\alpha)^{n/2} \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \sec\alpha \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ = \sec^{n+1}\alpha \begin{bmatrix} \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha & \cos n\alpha\sin\alpha + \sin n\alpha\cos\alpha \\ -\sin n\alpha\cos\alpha - \cos n\alpha\sin\alpha & -\sin n\alpha\sin\alpha + \cos n\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} \\ = (1+\tan^2\alpha)^{(n+1)/2} \begin{bmatrix} \cos(n+1)\alpha & \sin(n+1)\alpha \\ -\sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{bmatrix} \\ = \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{(n+1)/2} \begin{bmatrix} \cos(n+1)\alpha & \sin(n+1)\alpha \\ -\sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.18. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^n = 0$, entonces $I - A$ es invertible.

Solución: Basta observar que

$$(I-A)(I+A+A^2+...+A^{n-1}) = (I-A^n).$$

Como $A^n = 0$, entonces:

$$(I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{n-1}) = I\,.$$

Luego, $I + A + A^2 + ... + A^{n-1} = (I - A)^{-1}$ y $I - A$ es invertible.

1.19. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Verifique que $A^3 - A^2 - 5A + 5I_3 = 0$ para determinar A^{-1} en función de A.

Solución: Tenemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces $A^3 - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{aligned} A^3 - A^2 - 5A + 5I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^3 - A^2 - 5A + 5I_3 = 0 &\Rightarrow (A^2 - A - 5I_3)A = -5I_3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5}(A - A^2 + 5I_3)A = I_3 \\ &\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}(A - A^2 + 5I_3) \\ &\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

1.20. Calcule una inversa por la derecha de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución: Calcular una inversa por la derecha es equivalente a resolver $AX = I$ donde X corresponde a la inversa por la derecha de A, como $A_{2\times 3}$ y $I_{2\times 2}$, la única opción es que $X_{3\times 2}$, luego,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

esto es equivalente a resolver simultaneamente los sistemas $A(x_{11}, x_{21}, x_{31})^\top = (1, 0)^\top$ y $A(x_{12}, x_{22}, x_{32})^\top = (0, 1)^\top$.
Usamos eliminación de Gauss, para resolver el sistema

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -6 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & 3 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -19 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
x_{11} &= 4 + 19x_{31}\,, \\
x_{12} &= 1 + 19x_{32}\,, \\
x_{21} &= -\frac{3}{2} - \frac{13}{2}x_{31}\,, \\
x_{22} &= -\frac{1}{2} - \frac{13}{2}x_{32}\,.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos una familia de matrices inversas por la derecha, para valores x_{31}, x_{32} en $\mathbb{R}$, tomando $x_{31} = x_{32} = 0$ se obtiene

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.21. Sea A de 3×4 tal que existen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Av_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, Av_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que el sistema $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^3$.

(b) Determine un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

(a) $Ax = b$ es consistente para todo b si sólo si A es sobre si sólo si A tiene inversa por la derecha. Sea $B = [v_1 v_2 v_3]$, entonces $AB = C$ con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

dado que C es invertible, entonces $ABC^{-1} = I$ y la inversa por la derecha de A es BC^{-1}, donde

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) De lo anterior se tiene que $ABC^{-1} = I$, entonces $ABC^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Entonces $x = BC^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2v_1 + v_2 - v_3$.

1.22. Determine los valores de α, β para los cuales $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente dependiente y b pertenece a $\langle S \rangle$ (ambas situaciones a la vez), donde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Construyo la matriz A cuyas columnas son los vectores v_1, v_2, v_3

y b, esto es

$$\begin{aligned} A &= [\ \vec{v_1}\ \ \vec{v_2}\ \ \vec{v_3}\ \ \vec{b}\ ] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & \beta \\ \beta & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & \beta-\alpha \\ 0 & 1-2\beta & \alpha-\beta & 1-\alpha\beta \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & \alpha-\beta+(1-2\beta) & 1+\beta-\alpha+\alpha\beta-2\beta^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ son linealmente dependientes si sólo si

$$\alpha - 3\beta + 1 = 0\,.$$

El vector $\vec{b}$ pertenece a $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle$ si sólo si

$$1 + \beta - \alpha + \alpha\beta - 2\beta^2 = 0\,.$$

Resuelvo

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 1 = 0 \\ 1 + \beta - \alpha + \alpha\beta - 2\beta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 + 3\beta \\ \beta^2 - 3\beta + 2 = 0 \end{cases}.$$

Encontramos dos soluciones $\alpha = 2$, $\beta = 1$ o $\alpha = 5$, $\beta = 2$.

1.23. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule adj A.

Solución: Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3$,

$A_{13} = -3$, $A_{21} = -13$, $A_{22} = 5$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = 2$ y

$A_{33} = 2$.

Así, $B = \begin{vmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ y adj $A = B^t = \begin{vmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

1.24. Resuelva el sistema usando la regla de Cramer

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18\,, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24\,, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4\,. \end{aligned}$$

Solución: Primero se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

de manera que el sistema tiene solución única.
Después $D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 24 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 18 & 24 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12$ y $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 18 & 24 & 4 \end{vmatrix} = 18.$
Por lo tanto, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{6} = 4$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{6} = -2$ y $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3$.

1.25. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$. Hallar el $\mathrm{Ker}(A)$.

Solución: Reducimos la matriz por eliminación de Gauss y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

tenemos que $x_1 = -4x_4$, $x_2 = -4x_4$ y $x_3 = -4x_4$, entonces:

$$\mathrm{Ker}A = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{(\mathrm{mod}\ 5)}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Capítulo 2

Factorizaciones de Matrices

2.1. Demuestre la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible y escribala como producto de matrices elementales.

Solución: Para resolver el problema, se reduce A a I y se registran las operaciones elementales filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{3,1}(-3)]{E_{2,1}(-4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{3,2}(5)]{E_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{2,3}(-2)]{E_{1,3}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right).$$

Como A se redujo a I, se tiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

A^{-1} se obtuvo comenzando con I y aplicando nueve operaciones elementales. Así, A^{-1} es el producto de nueve matrices elementales

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,3}(-2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{1,3}(1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{E_3(-1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{3,2}(5)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{1,2}(-2)}$$

$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{3,1}(-3)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,1}(-4)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Entonces $A = (A^{-1})^{-1}$ = producto de las inversas de las nueve matrices elementales en orden opuesto.

Observación: Las inversas de las matrices elementales son:

$$\begin{aligned} (E_{i,j}(\alpha))^{-1} &= E_{i,j}(-\alpha)\,, \\ (E_i(\alpha))^{-1} &= E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)\,, \\ (P_{i,j})^{-1} &= P_{i,j}\,. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Escriba la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Solución: Se reduce A por filas para obtener la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U\,.$$

Después, al trabajar hacia atrás, se ve que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

y tomando las inversas de las cuatro matrices elementales, se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

2.3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Escriba A como producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.

(b) Resuelva el sistema $Ax = b$, donde $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

(a) Hacemos eliminacion gaussiana, pero esta vez no se dividen los elmentos de la diagonal (pivotes) por sí mismos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(\frac{3}{2})]{E_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{4,2}(-\frac{7}{4})]{E_{3,2}(-\frac{5}{8})} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{4,3}(-\frac{20}{3})} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} = U\,.$$

Usando las matrices elementales se puede escribir

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A\,.$$

Luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} U \, .$$

Se ha escrito A como un producto de seis matrices elementales y una matriz triangular superior. Sea L el producto de las matrices elementales. Debe usted verificar que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix}$, que es un matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Después se puede escribir $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Esta factorización se llama factorización LU de A.

(b) De lo anterior se puede escribir $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} .$$

El sistema $Ly = b$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \, , \\ 2y_1 + y_2 &= -8 \, , \\ -\frac{3}{2}y_1 + \frac{5}{8}y_2 + y_3 &= -4 \, , \\ -y_1 + \frac{7}{4}y_2 + \frac{20}{3}y_3 + y_4 &= -1 \, , \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \, , \\ y_2 &= -8 - 2y_2 = -16 \, , \\ y_3 &= -4 + \frac{3}{2}y_1 - \frac{5}{8}y_2 = 12 \, , \\ y_4 &= -1 + y_1 - \frac{7}{4}y_2 - \frac{20}{3}y_3 = -49 \, . \end{aligned}$$

Se acaba de realizar la sustitución hacia adelante. Ahora, de $Ux = y$

se obtiene

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4\,, \\ 4x_2 - 8x_3 - 8x_4 &= -16\,, \\ 3x_3 + 9x_4 &= 12\,, \\ -49x_4 &= -49\,, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} x_4 &= 1\,, \\ 3x_3 &= 12 - 9x_4 = 3 && \Rightarrow x_3 = 1\,, \\ 4x_2 &= -16 + 8x_3 + 8x_4 = -16, && \Rightarrow x_2 = 0\,, \\ 2x_1 &= 4 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2, && \Rightarrow x_1 = -1\,. \end{aligned}$$

La solución es $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.4. (Un camino más sencillo para obtener la factorización LU) Encuentre la factorización LU de

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Solución: Este problema ya lo resolvimos en el ejercicio 2.3. Ahora se usará un método más sencillo. Si $A = LU$, se sabe que A se puede factorizar como

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU.$$

Observese que la primera fila de U es la misma primera fila de A porque al reducir A a la forma triangular, no se efectua ninguna operación elemental a la primera fila.
Se pueden obtener todos los coeficientes que faltan con sólo multiplicar las matrices. La componente $2,1$ de A es 4. Así, el producto escalar de la segunda fila de L y la primera columna de U es igual a 4

$$4 = 2a \Rightarrow a = 2\,.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\text{componente 2,3:} && -4 = 4 + v \Rightarrow v = -8\,,\\
&\text{componente 2,4:} && 0 = 8 + w \Rightarrow w = -8\,,\\
&\text{componente 3,1:} && -3 = 2b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}\,,\\
&\text{componente 3,2:} && -2 = -\frac{9}{2} + 4c \Rightarrow c = \frac{5}{8}\,,\\
&\text{componente 3,3:} && -5 = -3 - 5 + x \Rightarrow x = 3\,,\\
&\text{componente 3,4:} && -2 = -6 - 5 + y \Rightarrow y = 9\,,\\
&\text{componente 4,1:} && -2 = 2d \Rightarrow d = -1\,,\\
&\text{componente 4,2:} && 4 = -3 + 4e \Rightarrow e = \frac{7}{4}\,,\\
&\text{componente 4,3:} && 4 = -2 - 14 + 3f \Rightarrow f = \frac{20}{3}\,,\\
&\text{componente 4,4:} && -7 = -4 - 14 + 60 + z \Rightarrow z = -49\,.
\end{aligned}$$

El resultado es la factorización que se obtuvo en el ejercicio 2.3. con un esfuerzo considerablemente menor.

2.5. Demuestre que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ tiene más de una factorización LU.

Solución: Usando la técnica del problema 2.4, se obtiene la factorización

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU\,.$$

Sin embargo, si se hace $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A = L_1U$ para cualquier número real x. Así, en este caso, A tiene una factorización LU pero no es única. Debe verificarse que A no es invertible.
Por otro lado,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L'U'$$

y esta factorización es única, aunque B no sea invertible. El lector debe verificar estos hechos. Este ejemplo muestra que si una matriz cuadrada

con una factorización LU no es invertible, entonces su factorización LU puede ser o no única.

2.6. Encuentre una matriz de permutación P y matrices triangulares inferior y superior L y U tales que $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y resuelva el sistema $Ax = b$ donde $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Solución: Para reducir A por filas a la forma triangular superior, primero se intercambian las filas 1 y 3 y después se continua como sigue

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{P_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Al realizar esta reducción por reglones se hicieron dos permutaciones.

$$P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$P = P_{2,3}P_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se puede reducir a una forma triangular superior sin permutaciones. Se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U \, .$$

Así,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} PA = U \, ,$$

o bien

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = LU \, .$$

Por otro lado, tenemos que

$$LUx = PAx = Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \, .$$

Se busca un y tal que $Ly = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \, .$$

Entonces, $y_1 = -6, y_2 = 7$ y $2y_1 + y_3 = 9$, por lo que $y_3 = 21$ y

$$y = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \, .$$

Continuando, se busca un x tal que $Ux = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$; es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \, .$$

Por lo que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6\,, \\ 2x_2 + 3x_3 &= 7\,, \\ -3x_3 &= 21\,. \end{aligned}$$

Por último, se obtiene despejando que $x = \begin{pmatrix} 57 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$.

2.7. Calcule la factorización de Choleski (con y sin raíz) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{17}{4} & \frac{11}{4} \\ 1 & \frac{11}{4} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Solución: La factorización de Choleski sin raíz corresponde a LDL^T, para esto primero debemos determinar la factorización LU.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{17}{4} & \frac{11}{4} \\ 1 & \frac{11}{4} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Se deduce entonces que la factorización de Choleski sin raíz, LDL^T de A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= LDL^T \\ &= L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T \\ &= (L\sqrt{D})(L\sqrt{D}^T)^T \\ &= (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T \\ &= KK^T \end{aligned}$$

donde $K = L\sqrt{D}$. Luego, tenemos la siguiente factorización de Choleski

con raíz de A es la que sigue:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.8. Demuestre que si A es invertible $B = A^TA$ y $B = R^TR$ es la factorización de Choleski (con raíz cuadrada) de B, X es la solución $R^T = A^T$, Y es la solución de $RY = X$, entonces $Y = A^{-1}$.

Solución: Si $R^TX = A^T$ y $RY = X$, entonces

$$\begin{aligned} R^TRY &= A^T \\ BY &= A^T \\ A^TAY &= A^T \qquad /(A^T)^{-1} \\ AY &= I \qquad /A^{-1} \\ Y &= A^{-1}\,. \end{aligned}$$

2.9. Sea A una matriz cuadrada de orden k y considera la matriz cuadrada B de orden $k+1$ definida por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Supongamos que A admite la descomposición $A = LU$. Determine una descomposición $B = \hat{L}\hat{U}$ para la matriz B.

Solución: Notemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,\dots,k+1]{E_{i,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & LU & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Sea $E = E_{k+1,1}(-1)E_{k,1}(-1)\cdots E_{3,1}(-1)E_{2,1}(-1)$, entonces

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & LU & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} B &= E^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & L & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \hat{L}\hat{U}\,. \end{aligned}$$

2.10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine la factorización $PA = LU$

(b) Determine el valor de α tal que el sistema $Ax = (1, 3, \alpha, 3 + 3\alpha)^T$ tenga solución.

(c) Resuelva el sistema anterior, con el valor α adecuado.

(d) Usando (a), encuentre bases del espacio fila y del espacio columna de A.

Solución:

(a) Hacemos eliminación de Gauss, primero intercambiando las filas 1

y 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{4,1}(1)]{E_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{4,2}(-4)]{E_{3,2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3,4}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U \, .$$

Entonces $PA = LU$ donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta factorización no es única.

(b) Como $Ax = b$, entonces $PAx = Pb$ y se resulve primero $Ly = Pb$ y luego $Ux = y$. Tenemos que $Pb = (3, 1, \alpha, 3 + 3\alpha)^T$ y

$$\begin{aligned} Ly &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \alpha \\ 3 + 3\alpha \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \alpha \\ \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

Luego $y = (3, 1, \alpha+3, \alpha-4)^T$, como la última fila de U es nula, el sistema $Ux = y$ tiene solución si y sólo si $\alpha+2 = 0$, esto es $\alpha = -2$.

(c) Resolvemos para $\alpha = -2$, $Ux = (3, 1, -2, 0)^T$

$$\begin{aligned} Ux &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \\ -x_3 + x_4 + x_5 \\ 2x_4 + x_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando x_1, x_3, x_4 como variables básicas y x_2, x_5 como variables libres obtenemos: $x = (2 - x_2, x_2, -2 + \frac{1}{2}x_2, -1 - \frac{1}{2}x_5, x_5)^T$. La solución de $Ax = b$ entonces

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Una base del espacio columna de A está formada por las columnas asociadas a las variables básicas de A, que son las columnas 1, 3, 4. Entonces una base del espacio columna de A es

$$\mathcal{B}_{Esp.\ Col} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base del espacio fila es el conjunto de filas no nulas de la matriz U. Entonces una base del espacio fila es

$$\mathcal{B}_{Esp.\ Fila} = \{(1, 2, -2, 3, 3), (0, 0, -1, 1,), (0, 0, 0, 2, 1)\}.$$

2.11. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} p & -p & 2p \\ -p & p+2 & -1 \\ 2p & -1 & 6p-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Determinar para qué valores de p la matriz es definida positiva.

(b) Para $p = 1$, efectuar la descomposición de Choleski y utilizarla para resolver el sistema $Ax = b$ siendo $b = (1, 0, 3)^t$.

Solución:

(a) Para que A sea positiva definida las submatrices principales tienen que tener determinante no negativo.

$$|A_1| = p > 0 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} p & -p \\ -p & p+2 \end{vmatrix} = 2p > 0\,,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} p & -p & 2p \\ -p & p+2 & -1 \\ 2p & -1 & 6p-1 \end{vmatrix} = -p(4p^2 - 8p + 3) > 0\,.$$

Como $p > 0$ tenemos que $|A_3| > 0 \Leftrightarrow 4p^2 - 8p + 3 < 0$, entonces $4p^2 - 8p + 3 = 0 \Rightarrow p = \frac{4 \pm 2}{4}$, es decir: $p = \frac{1}{2}$ o $p = \frac{3}{2}$. Se deduce entonces que $4p^2 - 8p + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$.

(b) Para $p = 1$ tenemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ determinamos su factorización LU

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(-2)]{E_{2,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A &= LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{F.C. sin raíz} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El sistema $Ax = b$ se puede escribir de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Del primero de ellos, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

se decuce que $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. y de la segunda se ve que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

entonces $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

2.12. Realizar la factorización de Choleski de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 19 \end{pmatrix}.$$

Solución: Claramente la matriz A es simétrica, además dado que el determinante de las matrices subprincipales son no negativos, ya que:

$$|A_1| = 1 > 0, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0\,,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 36 > 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 19 \end{vmatrix} = 576 > 0\,.$$

Hacemos eliminación de Gauss, para hallar la factorización LU

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4]{E_{i,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=3,4]{E_{i,2}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{4,3}(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = U\,.$$

Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = LU\,.$$

La Factorización de Choleski sin raíz es

$$A = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

La Factorización de Choleski con raíz es la que sigue

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2.13. Demuestre que si A es simétrica e invertible entonces A^2 es simétrica definida positiva.

Solución: Primero veamos que A^2es simétrica, esto se tiene de $(A^2)^t = A^tA^t = AA = A^2$. Falta ver que A^2 es definida positiva, en efecto si $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$, entonces

$$A^tA^2x = (x^tA)Ax = (x^tA^t)(Ax) = (Ax)^t(Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0 .$$

Como A es invertible y $x \neq 0$, entonces $Ax \neq 0$ y por lo tanto $\|Ax\| \neq 0$.

2.14. Sea A simétrica positiva definida de $n \times n$ y B una matriz de $n \times 1$. Pruebe que $C = 2A^3 + 3BB^t$ es simétrica positiva definida.

Solución: Basta probar que $C = C^t$. En efecto,

$$\begin{aligned} C^t &= (2A^3 + 3BB^t)^t \\ &= 2(A^3)^t + 3(BB^t)^t \\ &= 2(A^t)^3 + 3(B^t)^tB^t \\ &= 2A^3 + 3BB^t \\ &= C . \end{aligned}$$

Además, C es positiva definida pues

$$\begin{aligned} x^tCx &= 2x^tAAAx + 3x^tBB^tx \\ &= 2(Ax)^tA(Ax) + 3(B^tx)^t(B^tx) \\ &= 2z^tAz + 3y^ty \end{aligned}$$

donde $z = Ax$ y $y = B^tx$. Como A es positiva definida, entonces para todo z se tiene que $z^tAz > 0$ y como $B \neq 0$ y $x \neq 0$, entonces tenemos que $B^tx \neq 0$ y $y^ty > 0$.

2.15. Determine si la siguiente forma cuadrática

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2$$

es definida positiva o definida negativa y escribala como la suma ponderada de cuadrados.

Solución: Toda forma cuadrática puede ser escrita de la forma x^TAx, para esto se suele usar matrices simétricas, para nuestro caso:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} .$$

Entonces, A representa la forma cuadrática, debido a que

$$\begin{aligned} x^TAx &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 16x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2 . \end{aligned}$$

Ahora se escribe la matriz en la factorización LDL^T, para esto debemos escontrar primero la factorización LU.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} .$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} &\text{componente 2,1:} \quad 2a = -2 \Rightarrow a = -1 , \\ &\text{componente 2,2:} \quad -2a + x = 5 \Rightarrow x = 3 , \\ &\text{componente 2,3:} \quad 2a + y = 4 \Rightarrow y = 6 , \\ &\text{componente 3,1:} \quad 2b = 2 \Rightarrow b = 1 , \\ &\text{componente 3,2:} \quad -2b + cx = 4 \Rightarrow c = 2 , \\ &\text{componente 3,3:} \quad 2b + cy + z = 16 \Rightarrow z = 2 . \end{aligned}$$

Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU\,.$$

Se deduce que la factorización LDL^T de A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} x^T Ax &= x^T LDL^T x \\ &= (L^T x)^T D(L^T x) \\ &= y^T Dy \end{aligned}$$

donde $y = L^T x$, es decir

$$y^T Dy = (y_1 \;\; y_2 \;\; y_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2\,.$$

Además, como

$$y = L^T x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}\,.$$

Entonces la forma cuadrática nos queda

$$x^T Ax = y^T Dy = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2 = 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3(x_2 + 2x_3)^2 + 2x_3^2\,.$$

Por último esta forma cuadrática es positiva definida porque $x^T Ax > 0$ si $x \neq 0$, ya que los elementos de la diagonal de la matriz D son mayores que cero.

2.16. Considere la forma cuadrática

$$\varphi(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_4 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4$$

escríbala como suma ponderada mediante un cambio de variables adecuado y clasifiquela.

Solución: Todo forma cuadrática puede escribirse de la forma $\varphi(x) = x^T Ax$ donde A es una matriz simétrica, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Claramente A representa a la forma cuadrática, ya que

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_4 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_4 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 \\ &= \varphi(x)\,. \end{aligned}$$

Ahora se puede escribir A en su forma factorizada LDL^T, para esto debemos determinar su factorización LU.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = LU\,.$$

Los pivotes son $1, 4, 3, -\frac{7}{3}$, entonces la forma cuadrática φ no es definida positiva, ni definida negativa.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{\frac{7}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{\frac{7}{3}} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -2 & \frac{\sqrt{3}}{3} & i\sqrt{\frac{7}{3}} \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{\frac{7}{3}} \end{pmatrix}}_{K^T} .
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= x^T A x = x^T K K^T x \\
&= (K^T x)^T K^T x = \|K^T x\|^2 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_4 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ \sqrt{3}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_4 \\ i\sqrt{\frac{7}{3}}x_4 \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= (x_1 - x_2 - x_4)^2 + (2x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \left(\sqrt{3}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_4 \right)^2 - \frac{7}{3}x_4^2 .
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Determinantes

3.1. Sean A y B matriz invertibles de $n \times n$. Pruebe que $\det(A) = \det(B)$ si sólo si existe X con $\det(X) = 1$ tal que $A = XB$.

Solución: Si $\det(A) = \det(B)$, basta considerar $X = AB^{-1}$, entonces

$$\det(X) = \det(AB^{-1}) = \det(A)\frac{1}{\det(B)} = \det(A)\frac{1}{\det(A)} = 1$$

y además $XB = AB^{-1}B = AI = A$. Reciprocamente, Si $A = XB$ entonces $\det(A) = \det(XB) = \det(X)\det(B) = 1 \cdot \det(B) = \det(B)$.

3.2. Sea A de 5×5 tal que $\det(A - I) = 0$. Demuestre que existe $v \in \mathbb{R}^5$, no nulo tal que $Av = v$.

Solución: Como $\det(A - I) = 0$, entonces la matriz $(A - I)$ es singular, lo cual implica necesariamente que $\ker(A - I) \neq \{\vec{0}\}$. Por lo tanto, existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^5$ tal que $(A - I)v = \vec{0}$, es decir, $Av = v$.

3.3. Determine todas las condiciones sobre a, x de tal manera que $\det R \neq 0$ donde R es la matriz siguiente

$$R = \begin{pmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} \overset{E_{i,1}(-1)\ i=2,\ldots,5}{=} \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^4 \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{P_{1,5}}{=} -(x-a)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & a & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{E_{i,1}(-1)\ i=2,\ldots,4 \\ E_{5,1}(x)}}{=} -(x-a)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & a & a & a+x \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{5,2}(-a)}{=} -(x-a)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & a & 2a+x \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{5,3}(-a)}{=} -(x-a)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 3a+x \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{5,4}(-a)}{=} -(x-a)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a+x \end{vmatrix} .$$

La última matriz es una triangular superior, entonces

$$\det(R) = (x-a)^4(x+4a) .$$

Por lo tanto, si $x \neq a$ y $x \neq -4a$ se tiene que $\det(R) \neq 0$.

3.4. Sean u_1 y u_2 dos vectores en $\mathbb{R}^2$ y sean $v_1 = Au_1$ y $v_2 = Au_2$. Demuestre que $Area\langle v_1, v_2\rangle = Area\langle u_1, u_2\rangle |\det A|$.

Solución: Sea $B = (u_1 \;\; u_2)$ luego $C = (v_1 \;\; v_2) = (Au_1 \;\; Au_2) = AB$ como sabemos que $Area\langle u_1, u_2\rangle = |\det B|$, luego:

$$Area\langle v_1, v_2\rangle = |\det C| = |\det(AB)| = |\det B||\det A| = Area\langle u_1, u_2\rangle |\det A|$$

3.5. Encuentre el determinante de la siguiente matriz de $2n \times 2n$ donde cada bloque es de $n \times n$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ -b & -1 \cdots -1 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ -1 & -b \cdots -1 & -1 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -1 \cdots -b & -1 & & & & & \\ -1 & -1 \cdots -1 & -b & 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$|C| = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ b & 1 \cdots 1 & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & b \cdots 1 & 1 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 \cdots b & 1 & & & & & \\ 1 & 1 \cdots 1 & b & 0 & & \cdots & & 0 \end{vmatrix}.$$

Si intercambiamos la fila i por la fila $i+n$ para $i = 1, ..., n$ obtenemos

$$|\,C| = (-1)^n(-1)^n \begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & b & \cdots & 1 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & b & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & b & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Observemos que $(-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1$.
Ahora hacemos las operaciones elementales $E_{i,n}(-1)$ para $i = 1, ..., n-1$ y $E_{j,2n}(-1)$ para $j = n+1, ..., 2n-1$ y obtenemos

$$|\,C| = \begin{vmatrix} b-1 & 0 & \cdots & 0 & 1-b & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & b-1 & \cdots & 0 & 1-b & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-1 & 1-b & & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & b & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \\ & & & & & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 1-a \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1-a \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

Si $a = 1$ o $b = 1$ entonces $|\,C\,| = 0$, supongamos que $a \neq 1$ y $b \neq 1$ y hacemos las operaciones elementales $E_{n,\,i}\left(\frac{1}{b-1}\right)$ para $i = 1, ..., n-1$ y $E_{n,j}\left(\frac{1}{a-1}\right)$ para $j = n+1, ..., 2n-1$ y resulta

$$|C| = \begin{vmatrix} b-1 & 0 & \cdots & 0 & 1-b & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & b-1 & \cdots & 0 & 1-b & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-1 & 1-b & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-1+n & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \\ & & & & & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 1-a \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1-a \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-1+n \end{vmatrix}$$

La última matriz obtenida es triangular superior, entonces

$$|\,C| = (a-1)^{n-1}(b-1)^{n-1}(a+n-1)(b+n-1)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

3.6. Sea A una matriz de 5×5 con filas $v_1, v_2, ..., v_5$ y tal que

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ a & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Calcule $\det(AA^t)$.

Solución: Notemos que de la condición dada obtenemos que:

$$AA^t = \begin{pmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$\det(AA^t) = \begin{pmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{pmatrix} .$$

Entonces, recordamos que en el problema 3.3 se calculo este determinante haciendo operaciones elementales

$$\det(AA^t) = (x-a)^4(x+4a)\,.$$

Capítulo 4

Espacios Vectoriales

4.1. Determine si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales

(a) $D[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$ con las operaciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por escalar sólo para escalares racionales.

(c) $\{f \in C[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$ bajo las operaciones de (a).

(d) $\mathbb{R}^2$ con las operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ con las operaciones de matrices de suma y multiplicación por escalar.

(f) $V = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : a_0 = 0\}$ donde $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con las operaciones de $P_n(\mathbb{R})$

(g) $\{A \in M_{nn}(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ bajo la suma y multiplicación por escalar usuales

(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ con la suma de vectores y multiplicación por escalar usuales.

Solución: Debemos verificar los siguientes axiomas de un espacio vectorial:

i. Si $x, y \in V$ entonces $x + y \in V$
ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in V$
iii. $x + y = y + x$ $\forall x, y \in V$
iv. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$
v. Si $x \in V$, existe un vector $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$
vi. Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$
vii. Si $x, y \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
viii. Si $x \in V$ y α, β son escalres, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
ix. Si $x \in V$ y α, β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
x. Para cada vector $x \in V$, $1x = x$

(a) $D[0, 1]$ es un espacio vectorial, como la suma de funciones diferenciables es diferenciable, el axioma (i) se cumple y los otros axiomas se verifican fácilmente con $0 =$ la función cero (la cual es diferenciable) y $(-f)(x) = -f(x)$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es un espacio vectorial con $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ y $-(a + b\sqrt{2}) = -a - b\sqrt{2}$ los demás axiomas se verifican con facilidad.

(c) Si $f, g \in C = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$ como la suma de funciones continuas es continua se tiene que $f + g \in C[0, 1]$ y

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 = f(1) + g(1) = (f + g)(1)$$

luego, $f + g \in C$. Además, $0 =$ la función identicamente cero. Las otros axiomas se verifican sin dificultad.

(d) $\mathbb{R}^2$ con las operaciones

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$$

es un espacio vectorial.
iv. existe $0 = (-1, -1) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) + 0 = (x, y) + (-1, -1) = (x-1+1, y-1+1) = (x, y) = (-1+x+1, -1+y+1) = (-1, -1)+(x, y)$
v. existe $-(x, y) = (-x - 2, -y - 2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) + (-(x, y)) = (x, y) + (-x - 2, -y - 2) = (x - x - 2 + 1, y - y - 2 + 1) = (-1, -1) = 0$
vii.

$$\begin{aligned}\alpha((x, y) + (a, b)) &= \alpha(x + a + 1, y + b + 1) \\ &= (\alpha + \alpha(x + a + 1) - 1, \alpha + \alpha(y + b + 1) - 1)\end{aligned}$$

$$= (2\alpha + \alpha x + \alpha a - 1, 2\alpha + \alpha y + \alpha b - 1)$$
$$= ((\alpha + \alpha x - 1) + (\alpha + \alpha a - 1) + 1, (\alpha + \alpha y - 1) + (\alpha + \alpha b - 1) + 1)$$
$$= (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1) + (\alpha + \alpha a - 1, \alpha + \alpha b - 1)$$
$$= \alpha(x, y) + \alpha(a, b)$$

viii.

$$(\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)x - 1, (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)y - 1)$$
$$= ((\alpha + \alpha x - 1) + (\beta + \beta x - 1) + 1, (\alpha + \alpha y - 1) + (\beta + \beta y - 1) + 1)$$
$$= (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1) + ((\beta + \beta x - 1, \beta + \beta y - 1)$$
$$= \alpha(x, y) + \beta(x, y)$$

ix.

$$\begin{aligned} \alpha(\beta(x, y)) &= \alpha(\beta + \beta x - 1, \beta + \beta y - 1) \\ &= (\alpha + \alpha(\beta + \beta x - 1) - 1, \alpha + \alpha(\beta + \beta y - 1) - 1) \\ &= (\alpha + \alpha\beta + \alpha\beta x - \alpha - 1, \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta y - \alpha - 1) \\ &= (\alpha\beta + \alpha\beta x - 1, \alpha\beta y - 1) \\ &= (\alpha\beta)(x, y) \end{aligned}$$

x. Si $\alpha = 1$ entonces $1 \cdot (x, y) = (1 + x - 1, 1 + y - 1) = (x, y)$

(e) No es espacio vectorial, pues no se verifican los axiomas (i), (iv), (v) y (vi), por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha + \delta \\ \beta + \gamma & 2 \end{pmatrix}$$

la última matriz no pertenece al conjunto dado.

(f) V es un espacio vectorial. Es claro que la suma de dos polinomios de grado menor o igual a n es otro polinomio de grado menor o igual a n y la suma de los términos constantes es igual a cero si ambos son cero, por lo que se cumple el axioma (i). Sea $0 = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0$ entonces claramente $0 \in V$ y el axioma (iv) se cumple. Por último sea $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - 0$, se ve que el axioma (v) se cumple, las demas propiedades son fáciles de obtener.

(g) $\{A \in M_{nn}(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ es un espacio vectorial. Si A y B son

simétricas entonces $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$ y se cumple el axioma (i), con 0 la matriz cero de $n \times n$ la cual es simétrica. Si $A = (a_{ij})$ es simétrica entonces $-A = (-a_{ij})$ también es simétrica.

(h) No es un espacio vectorial, ya que no se verifican los axiomas (v) y (vi), por ejemplo, si $\alpha < 0$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y \leq 0$, entonces

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad \text{con} \quad \alpha y \geq 0$$

y no se verifica (vi).

4.2. Sea $C = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p'(-1) = p(0) + p''(1) = 0\}$. Demuestre que C es subespacio de $P_3(\mathbb{R})$. Encuentre una base y su dimensión.

Solución: Sean $p(t), q(t) \in P_3(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces basta probar que $(P+q)(t) \in P_3(\mathbb{R})$ y $(\alpha p)(t) \in P_3(\mathbb{R})$. En efecto,

$$(p+q)'(-1) = p'(-1) + q'(-1) = 0 + 0 = 0\,,$$

$$(p+q)(0) + (p+q)''(1) = p(0) + p''(1) + q(0) + q''(1) = 0 + 0 = 0\,.$$

Analogamente, se tiene que $(\alpha p)'(-1) = \alpha p'(-1) = 0$ y además $(\alpha p)(0) + (\alpha p)''(1) = \alpha(p(0) + p''(-1)) = 0$. Luego, C es subespacio.
Ahora, sea $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \in P_3(\mathbb{R})$ entonces $p(t) \in C$ si y sólo si $p'(-1) = p(0) + p''(1) = 0$, esto es,

$$p'(t)|_{t=-1} = (3a_3t^2 + 2a_2t + a_1)\big|_{t=-1} = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$$

y como $p(0) = a_0$ y $p''(t)|_{t=1} = (6a_3t + 2a_2)|_{t=1} = 6a_3 + 2a_2$, es decir

$$6a_3 + 2a_2 + a_0 = 0\,.$$

Entonces, las variables básicas son a_0 y a_1 y las libres a_2 y a_3.

$$\begin{aligned} a_0 &= -2a_2 - 6a_3 \\ a_1 &= 2a_2 - 3a_3 \end{aligned}$$

reemplazando a_0 y a_1 se obtiene

$$\begin{aligned} p(t) &= a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\ &= a_3t^3 + a_2t^2 + (2a_2 - 3a_3)t - 2a_2 - 6a_3 \\ &= a_3(t^3 - 3t - 6) + a_2(t^2 + 2t - 2)\,. \end{aligned}$$

Luego, la base de U es $\{t^2 + 2t - 2, t^3 - 3t - 6\}$ y $\dim U = 2$.

4.3. Determine una base del subespacio

$$L = \langle 1 + 3x - 2x^2 + x^3, 3 + 10x - 4x^2 + 4x^3, 2 + 8x + 4x^3 \rangle$$

de $P_3(\mathbb{R})$ y su dimensión.

Solución: Las coordenadas de los vectores generadores son $(1, 3, -2, 1)$, $(3, 10, -4, 4)$, $(2, 8, 0, 4)$ y formamos la matriz cuyas filas son los vectores coordenados y calculamos su forma escalonada reducida

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 10 & -4 & 4 \\ 2 & 8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Las filas no nulas de la forma escalonada reducida son las coordenadas de una base de L

$$\mathcal{B} = \{1 + 3x - 2x^2 + x^3, x + 2x^2 + x^3\} .$$

Otro método alternativo es escalonar la matriz cuyas columnas son los vectores coordenadas

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 8 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Las columnas pivotes son la 1 y 2. Por lo tanto, las columnas 1 y 3 de B son base de L

$$\hat{\mathcal{B}} = \{1 + 3x - 2x^2 + x^3, 3 + 10x - 4x^2 + 4x^3\} .$$

4.4. Pruebe que $\{1 + x - x^2 + 3x^3, 2 + 2x - x^3\}$ es un conjunto linealmente independiente, extiéndalo a una base de $P_3(\mathbb{R})$.

Solución: El conjunto es linealmente independiente si los vectores coordenados $(1, 1, -1, 3)$ y $(2, 2, 0, -1)$ son linealmente independientes, si

$$\alpha(1, 1, -1, 3) + \beta(2, 2, 0, -1) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 .$$

Entonces, $\{1 + x - x^2 + 3x^3, 2 + 2x - x^3\}$ es un conjunto linealmente independiente. Ahora, llevamos la matriz A a su forma escalonada reducida

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} .$$

Las filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

completan a una base de $\mathbb{R}^4$ a las filas de la matriz escalonda. Por lo tanto, los polinomios $x + \gamma x^2 + \delta x^3$ y x^3 extiende una base para $P_3(\mathbb{R})$.

4.5. Sean $B_1 = \{(1,1,1),(2,0,1),(1,2,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,2),(0,-1,1),(1,1,1)\}$, determine la matriz cambio de base.

Solución: Expresamos cada vetor de B_1 en término de los vectores de B_2. Sean $B_1 = \{(1,1,1),(2,0,1),(1,2,1)\} = \{u_1,u_2,u_3\}$ y $B_2 = \{(1,1,2),(0,-1,1),(1,1,1)\} = \{v_1,v_2,v_3\}$, luego

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \alpha_{31}u_3 \\ &= \alpha_{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_{21}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_{31}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Similarmente, tenemos que

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix},$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Entonces, los tres sistemas de ecuaciones se pueden escribir como

$$[v_1v_2v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} P.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.6. Sea $B_1 = \{1 + t - t^2, t^2 - t, 2 + t - 2t^2\}$ una base de $P_2(\mathbb{R})$. Si B_0 es la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$, encuentre cambio de base de B_1 a B_0.

Solución: Sean $u_1 = 1 + t - t^2$, $u_2 = t^2 - t$ y $u_3 = 2 + t - 2t^2$ y expresamos los vectores coordenadas, de cada vector u_i, en la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$.

$$[u_1]_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [u_2]_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [u_3]_{B_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$S = [\, [u_1]_{B_0} \;\; [u_2]_{B_0} \;\; [u_3]_{B_0} \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

luego la matriz de cambio de base de B_1 a B_0 es

$$P_1^0 = S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.7. Sea W es subespacio de P_3 generado por $\{x^2 - 2, x^3 + x, x^3 + 2x^2 + 1\}$. Determine si los siguientes vectores pertenecen o no a W.

(a) $x^2 - x + 3$,

(b) $4x^3 - 3x + 5$,

(c) $x^2 - 2x + 1$,

(d) $-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2-x-1$.

Solución: Determinamos el sistema homogéneo asociado al generador.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 2 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{a_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 2 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{a_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & a_2+\frac{a_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a_3-a_1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{a_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & a_2+\frac{a_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a_3-a_1-\frac{2}{5}a_2-\frac{1}{5}a_0 \end{array}\right] .$$

Entonces, $a_3-\frac{2}{5}a_2-a_1-\frac{1}{5}a_0=0$.

(a) $0-\frac{2}{5}\cdot 1-(-1)-\frac{1}{5}\cdot 3=-\frac{5}{5}+1=0\Rightarrow x^2-x+3\in\langle W\rangle$,

(b) $4-\frac{2}{5}(0)-(-3)-\frac{1}{5}(5)=4+3-1\neq 0\Rightarrow 4x^3-3x+5$ no pertence a $\langle W\rangle$,

(c) $0-\frac{2}{5}(1)-(-2)-\frac{1}{5}(1)=\frac{7}{5}\neq 0\Rightarrow x^2-2x+1$ no pertenece a $\langle W\rangle$,

(d) $-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\frac{5}{2}-(-1)-\frac{1}{5}(-1)=-\frac{3}{10}\neq 0\Rightarrow -\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2-x-1$ no pertenece a $\langle W\rangle$.

4.8. Considere los siguientes subespacios de $P_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle 3-2x+x^2+x^3,-1+x^2-x^3,2-x+x^3\rangle , \\ U_2 &= \langle 2-x+2x^2+x^3,-x-x^3,3-2x+3x^2+x^3\rangle . \end{aligned}$$

(a) Encuentre una base y la dimensión de U_1, U_2, U_1+U_2 y $U_1\cap U_2$.

(b) Encuentre una base y la dimensión de U_3 tal que $(U_1\cap U_2)\oplus U_3=P_3(\mathbb{R})$.

Solución: Tomando los vectores coordenados en la base $1,x,x^2,x^3$ de $P_3(\mathbb{R})$, para encontrar una base y la dimensión de U_1 observamos la siguiente matriz

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

luego, una base de U_1 es $\{3-2x+x^2+x^3, -1+x^2-x^3\}$ con dimensión 2. Analogamente para U_2 se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y U_2 tiene base $\{2-x+2x^2+x^3, -x-x^3\}$ y tiene dimensión 2. Para encontrar una base de U_1+U_2 se analiza la matriz cuyas columnas son los vectores coordenados de los vectores generadores de U_1 y U_2

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces una base de U_1+U_2 es $\{3-2x+x^2+x^3, -1+x^2-x^3, 2-x+2x^2+x^3\}$ la cual tiene dimensión 3. Ahora, como $\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$ se deduce que $\dim(U1 \cap U2) = 1$. Para encontrar una base de $U_1 \cap U_2$ debemos notar que un vector $(x,y,z,w) \in (U_1 \cap U_2)$ deberá tener la forma: $\alpha_1(3,-2,1,1) + \alpha_2(-1,0,1,-1)$, por pertenecer a U_1 y $\beta_1(2,-1,2,1) + \beta_2(0,-1,0,-1)$, por pertenecer a U_2 luego $\alpha_1(3,-2,1,1)+\alpha_2(-1,0,1,-1) = \beta_1(2,-1,2,1)+\beta_2(0,-1,0,-1)$ de esto,

$$\left.\begin{array}{r} 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\beta_1 = 0 \\ -2\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

luego debemos encontrar el Ker de la última matriz que esta generado por el vector $(1,1,1,1)$, con lo que $(x,y,z,w) = (3,-2,1,1) + (-1,0,1,-1) = 2(1,-1,1,0)$ implica que la base de $U_1 \cap U_2$ es $\{1-x+x^2\}$. Para encontrar U_3 consideramos la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego $\{1-x+x^2, 1, x, x^3\}$ es una base de P_3, por lo que $U_3 = \langle 1, x, x^3 \rangle$ y tiene dimensión 3.

4.9. Sea W_1 y W_2 subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$ con $n > 2$, demuestre que $W_1 \cap W_2 \neq 0$.

Solución: Basta probar que $\dim(W_1 \cap W_2) > 0$, para esto supongamos lo contrario, es decir, $W_1 \cap W_2 = 0$ como

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

obtenemos que $\dim(W_1 + W_2) = n - 1 + n - 1 = 2(n-1)$ y como $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\dim \mathbb{R}^n = n$ entonces $\dim(W_1 + W_2) > \dim \mathbb{R}^n$, lo cual es absurdo si $n > 2$. Por lo tanto,

$$\dim(W_1 \cap W_2) > 0 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \{0\}\ .$$

4.10. Dados los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{A = (a_{ij}) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A^t = A,\ \ a_{ii} = 0, i = 1,2,3\} \\ \mathcal{V} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \end{aligned}$$

(a) Encuentre una base para $\mathcal{U}$

(b) Decida si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son isomorfos.

Solución:

(a) Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

El conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente, ya que

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Por lo tanto, B es l.i. y genera a $\mathcal{U}$, luego B es una base de $\mathcal{U}$.

(b) Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 - x_3 - x_4\} \\ &= \{(-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-x_2, x_2, 0, 0) + (-x_3, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} . \end{aligned}$$

El conjunto $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ genera a $\mathcal{V}$ y es l.i. (verificar!). Por parte (a) sabemos que $dim\,\mathcal{U} = 3 = dim\,\mathcal{V}$, por lo tanto son isomorfos.

Capítulo 5

Transformaciones Lineales, Teorema de la Dimensión y Cambio de Base

5.1. Determine el núcleo de las siguientes transformaciones lineales

(a) $T : P_3 \to P_2$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$,

(b) $T : P_1 \to \mathbb{R}$ dada por $T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$.

Solución:

(a) De inmediato tenemos que

$$KerT = \{p(x) \in P_3 : T(p(x)) = 0\} .$$

Si $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d \in P_3$ entonces $T(p(x)) = 3ax^2+2bx+c = 0$ implica que $a = b = c = 0$ entonces $p(x) \in KerT \Leftrightarrow p(x) = d =$ constante.

(b) Del mismo modo, si $p(x) = ax + b \in P_1$ entonces

$$T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx = \left[a\frac{x^2}{2} + bx\right]_{-1}^{1} = 2b$$

entonces $p(x) \in KerT \Leftrightarrow p(x) = ax, a \in \mathbb{R}$.

5.2. Sea $T : P_2 \to P_3$, definida por $T(p(x)) = x^2p'(x)$ determine una base y su dimensión para $KerT$ y una para ImT.

Solución: Notemos que si $p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2 \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$, luego $T(p(x)) = x^2p'(x) = 2ax^3 + bx^2 = 0$ implica que $a = b = 0$ entonces $KerT = \{p(x) \in P_2 : p(x) = c, c \in \mathbb{R}\}$ y tomando el vector coordenada en la base $\{1, x, x^2\}$ de P_2 obtenemos $[p(x)] = (c, 0, 0) = c(1, 0, 0)$ entonces la base es $KerT = \{(1, 0, 0)\}$ y $\dim KerT = 1$. Ahora, como $\dim KerT + \dim ImT = \dim P_2 = 3 \Rightarrow \dim ImT = 2$. Sabemos que

$$ImT = \{q(x) \in P_3 : q(x) = T(p(x)), \forall p(x) \in P_2\}$$

luego, $q(x) \in ImT \Leftrightarrow q(x) = T(p(x)) = 2ax^3 + bx^2$, tomando el vector coordenada en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ de P_3 se tiene que $[p(x)] = (2a, b, 0, 0) = a(2, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0)$. Así, $\{2x^3, x^2\}$ es una base de la ImT.

5.3. Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que

(a) $S = \{(3, -1, 2), (0, 1, -1)\}$ sea una base para ImT ,

(b) $S' = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ sea una base para el núcleo de T.

Solución:

(a) Nosotros necesitamos que

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 0, 2) \\ T(0, 1, 0) &= (0, 1, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

y la elección del último vector es arbitraria, ahora si $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ \Rightarrow T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) \\ \Rightarrow T(x, y, z) &= (x, y, 2x + y) . \end{aligned}$$

(b) Del mismo modo queremos que

$$\begin{aligned} T(1, 0, 2) &= (0, 0, 0) \\ T(0, 1, 1) &= (0, 0, 0) \\ T(0, 1, 0) &= (a, b, c) \end{aligned}$$

Notemos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ luego $\{(1,0,2),(0,1,1),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ entonces $(x,y,z) = \alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,1,0)$

$$\left.\begin{array}{r} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2 + \alpha_3 \\ z = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = z - 2x \\ \alpha_3 = 2x + y - z \end{array}$$

Entonces,

$T(x,y,z) = \alpha_1 T(1,0,2) + \alpha_2 T(0,1,1) + \alpha_3 T(0,1,0) = (2x+y-z)(a,b,c)$.

5.4. Sea $T : P_2 \to P_3$ una transformación lineal, definida por $T(1) = 1$; $T(x) = 1 + x^2$; $T(x^2) = 1 + x^3$. Hallar $T(x^2 + 5x + 6)$.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned} T(ax^2 + bx + c) &= aT(x^2) + bT(x) + cT(1) \\ &= a(1 + x^3) + b(1 + x^2) + c \\ &= a + b + c + bx^2 + ax^3 \,. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} T(x^2 + 5x + 6) &= T(x^2) + 5T(x) + 6T(1) \\ &= 1 + x^3 + 5(1 + x^2) + 6 \\ &= 12 + 5x^2 + x^3 \,. \end{aligned}$$

5.5. Sea $T : V \to W$ una trasformación lineal. Demuestre que

(a) Si T es inyectiva entonces $dimV \leq dimW$

(b) Si T es sobre entonces $dimW \leq dimV$

Solución:

(a) Por el teorema de la dimensión:

$$dim\, ker\, T + dim\, Im\, T = dim\, V$$

como T es inyectiva entonces $Ker\, T = \{0\}$, luego $dim\, Ker\, T = 0$, entonces $dim\, Im\, T = dim\, V$. Ahora, como $Im\, T \leq W$, entonces $dim\, Im\, T \leq dim\, W$, por lo tanto, $dimV \leq dimW$.

(b) Ahora si T es sobreyectiva entonces $Im\,T = W$, por el teorema de la dimensión tenemos que

$$dim\,Ker\,T + dim\,W = dim\,V$$

luego, $dimW \leq dimV$.

5.6. (a) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$Im\,T = \langle\{(1,1,0),(0,1,2),(3,-1,-8)\}\rangle$$

entonces T es inyectiva.

(b) Supongamos que $dim\,V > dim\,W$. Sea $L : V \to W$ una aplicación lineal. ¿Qué puede decir del núcleo de L?

Solución:

(a) Notemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow dim\,T = 2$, por el teorema de la dimensión obtenemos que $dim\,Ker\,T = 0$, luego T es inyectiva.

(b) Afirmamos que el $Ker\,L \neq \{0\}$. En efecto, si $Ker\,L = \{0\}$ entonces $dimKer\,L = 0$ y por el teorema de la dimensión: $dimImL = dimV$, como $ImL \leq W \Rightarrow dimV = dimImL \leq dimW$, lo cual contradice la hipótesis de $dim\,V > dim\,W$.

5.7. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ definida por: $T(p(x)) = x^2p(x)$. Determine $[T]_f^e$, donde $e = \{1+x^2, 1+2x+3x^2, 4+5x+x^2\}$ y $f = \{1, x, x^3, x^3+x^2, x^4\}$.

Solución: Sea $f = \{1, x, x^3, x^3 + x^2, x^4\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ entonces:

$$\begin{aligned} T(1+x^2) &= x^2 + x^4 = w_4 + w_3 - w_2 \\ T(1+2x+3x^2) &= x^2 + 2^3 + 3^4 = 3w_4 + w_3 + w_2 \\ T(4+5x+x^2) &= 4x^2 + 5x^3 + x^4 = w_4 + 4w_3 + w_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [T]_f^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.8. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sea $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de W tal que

$$[T]_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Encuentre una base B_3 de W tal que $[T]_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Tenemos que:

$$T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = w_2, \quad T(v_3) = w_3, \quad T(v_4) = w_1 + w_2 + w_3 .$$

Queremos encontrar una base $B_3 = \{s_1, s_2, s_3\}$ tal que

$$T(v_1) = s_1, \quad T(v_2) = s_2 - s_1, \quad T(v_3) = s_3 - s_2, \quad T(v_4) = s_3$$

esto es,

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= w_1 \\ s_2 - s_1 &= w_2 \\ s_3 - s_2 &= w_3 \\ s_3 &= w_1 + w_2 + w_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s_1 &= w_1 \\ s_2 &= w_1 + w_2 \\ s_3 &= w_1 + w_2 + w_3 \end{aligned}$$

Los vectores $\{s_1, s_2, s_3\}$ son linealmente independientes, pues los vectores coordenados en la base B_2 forma la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ no es singular, ya que su determinante es $1 \neq 0$ y B_3 es un base pues son 3 vectores L.I. en un espacio vectorial de dimensión 3.

5.9. Considere $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Determine la matriz de T con respecto a las bases canónicas $B = \{1, t, t^2\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a saber $\{e_1, e_2, e_3\}$, suponiendo que

$$\begin{aligned} T(1 + t - t^2) &= e_1 + e_3 , \\ T(t^2 - t) &= e_1 + e_2 - e_3 , \\ T(2 + t - 2t^2) &= -e_1 + e_2 - 2e_3 . \end{aligned}$$

Solución: Sea A la matriz que representa a T con respecto a las bases

canónicas, entonces

$$T(1+t-t^2)=e_1+e_3 \;\Leftrightarrow\; A\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$T(t^2-t)=e_1+e_2-e_3 \;\Leftrightarrow\; A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$$T(2+t-2t^2)=-e_1+e_2-2e_3 \;\Leftrightarrow\; A\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Luego, tenemos que $A\begin{bmatrix}1&0&2\\1&-1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A &= \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\1&-1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2&3&4\\1&-1&0\\0&4&3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5.10. Determine $\alpha\in\mathbb{R}$ de modo que la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por: $T(x,y,z)=(x+y-z,\alpha x,x+y-\alpha z)$ sea un isomorfismo.

Solución:

i. Primeros T debe ser inyectiva si sólo si el sistema tiene única solución

$$\left.\begin{aligned}x+y-z&=0\\ \alpha x&=0\\ x+y-\alpha&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\ \alpha&0&0\\1&1&-\alpha\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-\alpha&\alpha\\0&0&1-\alpha\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tiene única solución si y sólo si $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 1$, en cuyo caso T es inyectiva.

ii. T debe ser sobreyectiva. Para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ por el teorema de la dimensión, como $Im\, T \leq \mathbb{R}^3$ y $dim\, Im\, T = dim\, \mathbb{R}^3 = 3$ entonces $Im\, T = \mathbb{R}^3$ luego T es sobreyectiva.

Por lo tanto, T es isomorfismo si y sólo si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$.

5.11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(a, b, c) = (a + b + c, a - b + 2c, 3b - c) .$$

(a) Demuestre que T es una transformación lineal biyectiva.

(b) Encuentre $[T]_e^f$ donde e es la base canónica y $f = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (2, 1, 0)\}$.

(c) Encuentre T^{-1}, usando T.

(d) Encuentre T^{-1}, usando $[T^{-1}]_f^e$.

Solución:

(a) Sean $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned} & T((a, b, c) + (x, y, z)) = T(a + x, b + y, c + z) \\ = \;& (a + x + b + y + c + z, a + x - (b + y) + 2(c + z), 3(b + y) - (c + z)) \\ = \;& (a + b + c, a - b + 2c, 3b - c) + (x + y + z, x - y + 2z, 3y - z) \\ = \;& T(a, b, c) + T(x, y, z) . \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha(a, b, c)) &= T(\alpha a, \alpha b, \alpha c) \\ &= (\alpha a + \alpha b + \alpha c, \alpha a - \alpha b + 2\alpha c, 3\alpha b - \alpha c) \\ &= (\alpha(a + b + c), \alpha(a - b + 2c), \alpha(3b - c)) \\ &= \alpha(a + b + c.a - b + 2c, 3b - c) \\ &= \alpha T(a, b, c) . \end{aligned}$$

Luego, T es una transformación lineal.
Ahora, $T(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow (a + b + c, a - b + 2c, 3b - c) = (0, 0, 0)$ es decir,

$$\left.\begin{aligned} a + b + c = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ 3b - c = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b = c = 0$$

entonces $Ker\, T = \{0\} \Leftrightarrow T$es inyectiva. Por otro lado, por el teorema de la dimensión tenemos que $dim\, Im\, T = dim \mathbb{R}^3 = 3$ y como $Im\, T \leq \mathbb{R}^3$ esto implica que $Im\, T = \mathbb{R}^3$ y luego T es sobreyectiva.

(b) Tenemos que

$$\begin{aligned} T(1,1,0) &= (2,0,3) = 2e_1 + 3e_3 \,, \\ T(1,-1,1) &= (1,4,-4) = e_1 + 4e_2 - 4e_3 \,, \\ T(2,1,0) &= (3,1,3) = 3e_1 + e_2 + 3e_3 \,. \end{aligned}$$

Entonces

$$[T]_e^f = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} .$$

(c) Si $(x,y,z) = T(a,b,c) = (a+b+c, a-b+2c, 3b-c) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = x \\ a-b+2c = y \\ 3b-c = z \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 2 & y \\ 0 & 3 & -1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & 1 & y-x \\ 0 & 3 & -1 & z \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{x-y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3(x-y)+2z \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 5x - 4y - 3z \\ b = -x + y + z \\ c = -3x + 3y + 2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(x,y,z) = (5x - 4y - 3z, -x + y + z, -3x + 3y + 2z) \,.$$

(d) Notemos que

$$[T^{-1}]_f^e = ([T]_e^f)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -16 & 15 & 11 \\ -3 & 3 & 2 \\ 12 & -11 & -8 \end{bmatrix}$$

como $[T^{-1}]_f^e[(x,y,z)]_e = [T^{-1}(x,y,z)]_f \Rightarrow [(x,y,z)]_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ se obtiene que

$$[T^{-1}]_e = \begin{bmatrix} -16 & 15 & 11 \\ -3 & 3 & 2 \\ 12 & -11 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16x + 15y + 11z \\ -3x + 3y + 2z \\ 12x - 11y - 8z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T^{-1}(x,y,z) &= (-16x+15y+11z)(1,1,0)+(-3x+3y+2z)(1,-1,1)\\ &\quad +(12x-11y-8z)(2,1,0)\\ \Rightarrow T^{-1}(x,y,z) &= (5x-4y-3z,-x+y+z,-3x+3y+2z)\,.\end{aligned}$$

5.12. Si $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ donde

$$A=[S]_f^e=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\\1&1\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad B=[T]_g^f=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&-1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

para las bases $e=\{(1,1),(1,-1)\}$ $f=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ $g=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$.

(a) Encuentre S y T usando A y B.

(b) Encuentre $T\circ S$ usando A y B.

Solución:

(a) Tenemos que $[S]_f^e[(x,y)]_e=[S(x,y)]_f$ y como

$$(x,y)=\frac{x+y}{2}(1,1)+\frac{x-y}{2}(1,-1)\Rightarrow[(x,y)]_e=\begin{bmatrix}\frac{x+y}{2}\\\frac{x-y}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[S(x,y)]_f=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x+y}{2}\\\frac{x-y}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\y\\x\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S(x,y)=y(1,1,1)+y(1,1,0)+x(1,0,0)=(x+2y,2y,y)\,.$$

Analogamente, $[T]_g^f[(x,y,z)]_f=[T(x,y,z)]_g$ y como

$$(x,y,z)=z(1,1,1)+(y-z)(1,1,0)+(x-y)(1,0,0)\Rightarrow[(x,y,z)]_f=\begin{bmatrix}z\\y-z\\x-y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[T(x,y,z)]_g=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&-1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\y-z\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\-x+3y-3z\\x\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(x,y,z) &= y\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-x+3y-3z)\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4y-3z&3y-3z\\x&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Observemos que

$$[T\circ S]_g^e=[T]_g^f[S]_f^e=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&-1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2\\0&-2\\3&-1\\0&0\end{bmatrix}.$$

Luego, procediendo de manera similar que en (a) se tine que

$$[T\circ S]_g^e[(x,y)]_e=[(T\circ S)(x,y)]_g$$

de (a) ya teniamos que $[(x,y)]_e=\begin{bmatrix}\frac{x+y}{2}\\ \frac{x-y}{2}\end{bmatrix}$ entonces

$$[(T\circ S)(x,y)]_g=\begin{bmatrix}2&-2\\0&-2\\3&-1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x+y}{2}\\ \frac{x-y}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\y-x\\x+2y\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (T\circ S)(x,y) &= y\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(y-x)\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+(x+2y)\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4y&3y\\x+2y&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5.13. Sean $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales y sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{R}^2$ y B_3 base de $\mathbb{R}^3$ si

$$[T\circ R]_{B_3}^{B_1}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad[R]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Suponiendo que R es invertible, determine $[T]_{B_3}^{B_2}$.

Solución: Notemos que $T=T\circ R\circ R^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}[T]_{B_3}^{B_2} &= [T\circ R\circ R^{-1}]_{B_3}^{B_2}\\ &= [(T\circ R)\circ R^{-1}]_{B_3}^{B_2}\\ &= [T\circ R]_{B_3}^{B_1}[R^{-1}]_{B_1}^{B_2}\\ &= [T\circ R]_{B_3}^{B_1}([R]_{B_2}^{B_1})^{-1}\end{aligned}$$

como $([R]_{B_2}^{B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$[T]_{B_2}^{B_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

5.14. Sea $T : M_{n\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ lineal dada por $T(A) = Au$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Encuentre el $Ker(T)$ y su dimensión.

Solución:

$$\begin{aligned} Ker\, T &= \{A = [v_1 \ v_2 \ v_3] \in M_{n\times 3}(\mathbb{R}) : v_1 + v_2 + v_3 = \vec{0}\} \\ &= \{A = [v_1 \ v_2 \ -v_1 - v_2] \in M_{n\times 3}(\mathbb{R}) : v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n\} . \end{aligned}$$

Entonces $KerT = \langle A_{i,j} = [e_i \, e_j \, -e_i - e_j]\rangle$ donde los e_i y e_j son vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.
Notemos que la transformación es sobreyectiva, pues dado $u \in \mathbb{R}^n$ basta tomar la matriz $A = [u \ \vec{0} \ \vec{0}]$ y luego $T([u \ \vec{0} \ \vec{0}]) = u$, por el teorema de la dimensión tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(Ker\, T) &= \dim(M_{n\times 3}(\mathbb{R})) - \dim(Im\, T) \\ &= \dim(M_{n\times 3}(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{R}^n) \\ &= 3n - n = 2n . \end{aligned}$$

5.15. Sea V, W espacios vectoriales de dimensión 3 y 4 respectivamente tal que $V =< v_1, v_2, v_3 >$ y $W =< w_1, w_2, w_3, w_4 >$. Sea $T : V \to W$ lineal tal que

$$\begin{aligned} T(v_1 - v_3) &= w_1 + w_2 , \\ T(v_1 - v_2 - v_3) &= w_1 + w_3 , \\ T(v_1 - v_2 - 2v_3) &= w_1 + w_4 . \end{aligned}$$

(a) ¿Es T 1-1? ¿Es T sobre? Justifique.

(b) Encuentre bases en V y W tal que la matriz de la transformación lineal sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Solución: Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, dado que $\dim(V) = 3$ y $\dim(W) = 4$, entonces B_1 y B_2 son bases de V y W respectivamente. Consideremos $B_3 = \{v_1 - v_3, v_1 - v_2 - v_3, v_1 - v_2 - 2v_3\}$ es también una base de V, pues la matriz cambio de base es invertible

$$P_1^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matriz de T con respecto a esas bases es

$$[T]_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como al escalonar se obtiene una matriz $1-1$, entonces la transformación lineal es $1-1$. Por otro lado, la transformación no puede ser sobre pues $dim\, V < dim\, W$.

Para la matriz T sea $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ se busca en V una base $\{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3, b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3, c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3\}$ y consideramos a W con la base B_2 tal que

$$\begin{aligned} T(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4\,, \\ T(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) &= w_2 - w_3\,, \\ T(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) &= w_3 - w_4\,. \end{aligned}$$

Entonces matricialmente debe ocurrir que

$$[[T(v_1)]_2[T(v_2)]_2[T(v_3)]_3] \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y como $[T]_2^1 = [T]_2^3 P_3^1$ luego

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} &= [T]_2^3 P_3^1 \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Se concluye que $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = I$. Luego las bases buscadas son $\{v_1, v_2, v_3\}$ en V y $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ en W.

5.16. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & a+b+c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si $B_1 = \{1 - x, 1 + x, x^2\}$ es una base de $P_2(\mathbb{R})$ y C es la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ determine $[T]_C^{B_1}$.

(b) Determine todos los polinomios $p \in P_2(\mathbb{R})$ tal que $[T(p)]_{C_1} = (1, 2, 1, 0)^t$, donde C_1 es la base de $M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$C_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Determine una base para $Ker\, T$ y para $Im\, T$.

Solución:

(a)

$$\left.\begin{array}{r} T(1-x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T(1+x)=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T(x^2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [T]_C^{B_1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Sabemos que

$$[T(p)]_{c_1}=[T]_{C_1}^{B_1}[p]_{B_1} \qquad \text{y} \qquad [T]_{C_1}^{B_1}=[I]_{C_1}^{C}[T]_C^{B_1}$$

$$\text{donde } [I]_{C_1}^{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{C_1}^{B_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Si } [p]=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$[T(p)]_{C_1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2b \\ 2b+c \\ c \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c=1, 2b=1 \Rightarrow [p]=\begin{bmatrix} a \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p(x)=a(1-x)+\frac{1}{2}(1+x)+x^2$$

$$\Rightarrow p(x)=a+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-a\right)x+x^2\,.$$

(c)

$$\begin{aligned} Ker\,T &= \left\{ a+bx+cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ a+bx+cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} a+b & a+b+c \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{ a+bx+cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a+b=0 \wedge c=0 \} \\ &= \{ a(1-x) \in P_2(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \} . \end{aligned}$$

Luego una base para $Ker\,T$ es $\{(1-x)\}$.
Para $Im\,T$, basta observar que

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T(x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Luego una base para $Im\,T$ es $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ pues es linealmente independiente y genera.

5.17. Considere V un espacio vectorial con $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ una base. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal definida por

$T(b_1) = b_1$, $T(b_2) = b_1 + b_2$, $T(b_3) = b_1 + b_2 + b_3$,
$t(b_4) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$, $T(b_5) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.

(a) Determine $[T]_{B_2}^{B_2}$ donde B_2 es otra base de V y $[I]_{B_2}^{B_1}$ es la matriz cambio de base dada por

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

(b) Sea v en V dado por $v = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5$. Determine w como combinación lineal de la base B_1, de tal manera que $Tw = v$.

Solución:

a) Claramente

$$[T]_{B_1}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Notemos que

$$[T]_{B_2}^{B_2} = [I]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2} = [I]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_1}([I]_{B_2}^{B_1})^{-1}$$

donde

$$([I]_{B_2}^{B_1})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$[T]_{B_2}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{B_2}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Tenemos que $v = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 \Rightarrow [v]_{B_1} = (1, 2, 3, 4, 5)^t$ y sabemos que $[T]_{B_1}^{B_1}[w]_{B_1} = [v]_{B_1}$ si $[w]_{B_1} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^t$ entonces

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 &= 1 \\ w_2 + w_3 + w_4 + w_5 &= 2 \\ w_3 + w_4 + w_5 &= 3 \\ w_4 + w_5 &= 4 \\ w_5 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_5 = 5; w_4 = w_3 = w_2 = w_1 = -1$$

$$\Rightarrow [w]_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow w = -b_1 - b_2 - b_3 - b_4 + 5b_5\,.$$

5.18. Sea $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una transformación lineal tal que $L \neq 0$ pero $L^2 = L \circ L = 0$. Demuestre que existe una base $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $L(u) = v$ y $L(v) = 0$.

Solución: Sabemos que $L \neq 0$, entonces existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $L(u) = v \neq 0$ y además $L(v) = L(L(u)) = L \circ L(u) = 0$. Falta probar que $\{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, es decir, que $\{u, v\}$ es linealmente independiente. Notemos que

$$0 = \alpha u + \beta v = \alpha u + \beta L(u) \, .$$

Aplicando la aplicación L a ambos lados de la igualdad.

$$0 = L(0) = \alpha L(u) + \beta LL(u) = \alpha v$$

entonces $\alpha = 0$ y reemplazando esto en la primera ecuación, se obtiene $0 = \alpha u + \beta v = \beta v$ entonces $\beta = 0$.

5.19. Sea $T : U \to V$ una transformación lineal y $b \neq 0$ un vector de V. ¿Por qué no es subespacio de U el conjunto $T^{-1}(b) = \{u \in u / T(u) = b\}$?

Solución: Si $u, v \in T^{-1}(b)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = b + b = 2b \Rightarrow u + v \text{ no esta en } T^{-1}(b)$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha b \Rightarrow \alpha u \text{ no esta en } T^{-1}(b) \, .$$

Luego, $T^{-1}(b) = \{u \in u / T(u) = b\}$ $(b \neq 0)$ no es subespacio de U.

Capítulo 6

Bases Ortonormales y Proyecciones

6.1. Contruir una base ortonormal para el subespacio W del espacio $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,3),(3,4,5),(1,-1,0)\}$.

Solución: Sea $\{(1,2,3),(3,4,5),(1,-1,0)\} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ entonces por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, tenemos que una base ortogonal es $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ y una base ortonormal es $\{\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}\}$ donde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1\,, \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1\,, \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1 - \frac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2\,,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1 = (1,2,3)\\ \beta_2 = \frac{1}{7}(8,2,-4)\\ \beta_3 = \frac{1}{2}(1,-2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r}\|\beta_1\| = \sqrt{14}\\ \|\beta_1\| = \sqrt{\frac{12}{7}}\\ \|\beta_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\end{array}\,.$$

Por lo tanto, la base ortonormal es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\sqrt{\frac{7}{12}}\left(\frac{8}{7},\frac{2}{7},-\frac{4}{7}\right),\sqrt{\frac{3}{8}}(1,-2,1)\right\}\,.$$

6.2. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ con bae $S = \{(1,1,0),(-2,0,1)\}$. Sea $\alpha = (-1,2,-3)$ un elemento de W.

(a) Hallar la longitud de α directamente.

(b) Usar Gram-Schmidt para transformar S en una base ortonormal T de W.

(c) Hallar la longitud de α usando el vector coordenada de α respecto a T.

Solución:

(a) $\| \alpha\| = \sqrt{< \alpha, \alpha >} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$.

(b) Tenemos que: $\beta_1 = (1, 1, 0)$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= (-2, 0, 1) - \frac{< (-2, 0, 1), (1, 1, 0) >}{< (1, 1, 0), (1, 1, 0) >}(1, 1, 0) \\ \Rightarrow \beta_2 &= (-1, 1, 1) \end{aligned}$$

con $\|\beta_1\| = \sqrt{2}$ y $\|\beta_2\| = \sqrt{3}$ entonces la base ortonormal es

$$T = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0), \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1) \right\} .$$

(c) Tenemos que $\|[\alpha]_T\| = \sqrt{14}$.

6.3. Proyecte b al espacio columna de A resolviendo $A^tAx = A^tb$ y luego $p = Ax$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Para cada caso calcule $e = b - p$ y verifique que e es perpendicular a las columnas de A. (i,e: $A^te = 0$).

Solución:

(a)

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} A^tAx &= A^tb \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x &= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = A^tx = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $e = b - p = (0, 0, 4)^t$ y $A^te = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = (0, 0)^t$.

(b) Analogamente tenemos que

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} A^tAx &= A^tb \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x &= \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = A^tx = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Luego, $e = b - p = (0,0,0)^t$ y $A^t e = (0,0)^t$.

6.4. Calcule las matrices de proyección P_1 y P_2 para las proyecciones del problema anterior. Verifique que $Pb = p = Ax$, para cada matriz P. Verifique también que $P_1^2 = P_1$.

Solución:

(a) Note que ya hemos calculado $(A^tA)^{-1}$ entonces:

$$\begin{aligned} P_1 &= A(A^tA)^{-1}A^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow P_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Además

$$P_1 b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = Ax\,.$$

(b) Analogamente

$$\begin{aligned} P_2 &= A(A^tA)^{-1}A^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow P_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Además

$$P_2 b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = Ax.$$

Finalmente $P_1^2 = P_1$ se verifica triavialmente.

6.5. Plantee el siguiente problema de minimización como un problema de mínimos cuadrados. Indique el vector b a proyectar, el subespacio al que se proyecta y resuelva el problema

$$\min_{x,\, y\in\mathbb{R}} (1-x+y)^2 + 2(2-x+2y)^2 + \frac{1}{2}(-1+2x+y)^2 \,.$$

Solución: Puesto que

$$(1-x+y)^2 + 2(2-x+2y)^2 + \frac{1}{2}(-1+2x+y)^2 = \|Ax-b\|^2$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} .$$

Luego, el problema de minimización planteado es equivalente a un problema de solución de un sistema de ecuaciones por mínimos cuadrados. Las ecuaciones normales $A^tAx = A^tb$ son

$$\begin{aligned} A^tAx &= A^tb \\ \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 11/2 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} 6 \\ -9/2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x &= \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 11/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ -9/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{39} \begin{bmatrix} 11/2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -9/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

cuya solución es $x = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$, de aquí se tiene

$$Ax - b = \frac{1}{13}(-17, -18, -3\sqrt{2})^t$$

con lo que el mínimo de la función corresponde a $\|Ax-b\|^2 = \frac{631}{169}$.

Capítulo 7

Vectores y Valores Propios, Diagonalización

7.1. Determine los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Determine la multiplicidad algebraica y geómetrica de los valores propios. Diga si A es diagonalizable.

Solución: Hallamos los valores propios resolviendo $det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(4-\lambda)-4)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 4)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda - (2+2\sqrt{2}))(\lambda - (2-2\sqrt{2}))$$

debido a que

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-4)}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2} .$$

Entonces, los valores propios son

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 2 - 2\sqrt{2}$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2 \quad &\text{con multiplicidad algebraica} \quad s_1 = 1 , \\ \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2} \quad &\text{con multiplicidad algebraica} \quad s_2 = 1 , \\ \lambda_3 = 2 - 2\sqrt{2} \quad &\text{con multiplicidad algebraica} \quad s_3 = 1 . \end{aligned}$$

Notemos que los valores propios son todos distintos luego A es diagonalizable. Calculemos ahora los vectores propios asociados a los valores propios λ_i.
Para $\lambda_1 = 2$ tenemos que resolver $(A - 2I)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Como

$$\left.\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow x_3 = 0, \quad -2x_1 = 3x_3 .$$

Luego,

$$W_{\lambda_1} = Ker(A - 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 2$ es $g_1 = dim(W_{\lambda_1}) = 1$.
Para $\lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2}$ tenemos que resolver $(A - (2 + 2\sqrt{2})I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -2(1+\sqrt{2}) & -3 & 2 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3 & 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Notemos que $x_2 = 0$, basta escalonar

$$\left.\begin{pmatrix} -2(1+\sqrt{2}) & 2 \\ 2 & 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow x_1 = x_3(\sqrt{2} - 1) .$$

Luego,

$$W_{\lambda_2} = Ker(A - (2 + 2\sqrt{2})I) = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2}$ es $g_2 = dim(W_{\lambda_2}) = 1$.
Para $\lambda_3 = 2 - 2\sqrt{2}$ tenemos que resolver $(A - (2 - 2\sqrt{2})I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 + 2\sqrt{2} & -3 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3 & 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Notemos que $x_2 = 0$, basta escalonar

$$\left.\begin{pmatrix} -2+2\sqrt{2}) & 2 \\ 2 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow x_1 = -x_3(1+\sqrt{2}).$$

Luego,

$$W_{\lambda_2} = Ker(A-(2-2\sqrt{2})I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2+2\sqrt{2}$ es $g_2 = dim(W_{\lambda_2}) = 1$.

7.2. Sea $L : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{M}_{2\times 2}$, $L(X) = AXB$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine la matriz que representa a L con respecto a la base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ y su polinomio caracteristico. ¿Cuáles son los valores y vectores propios de L? Si la matriz es diagonalizable indique su forma diagonal.

Solución: Notemos que:

$$\left.\begin{array}{rl} L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [L]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = C\,.$$

El polinomio caracteristico de la matriz C es

$$\begin{aligned} P_C(\lambda) &= |C-\lambda I| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 3\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda + 16 \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda - 8)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= (\lambda-4)(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2)\,. \end{aligned}$$

Entonces, los vectores propios son $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = 4$.
Para $\lambda_1 = 4$ tenemos que resolver $(C - 4I)x = 0$ y como

$$C - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -10/3 & -4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $x_3 = 2x_4$. $x_2 = -x_4$ y $x_1 = -3x_4$

$$\Rightarrow W_{\lambda_1} = Ker(C - 4I) =< (-3, -1, 2, 1)^t) > \ .$$

Para $\lambda_2 = -2$ tenemos que resolver $(C + 2I)x = 0$ y como

$$C + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $x_3 = -x_4$. $x_2 = -x_4$ y $x_1 = x_4$

$$\Rightarrow W_{\lambda_2} = Ker(C + 2I) =< (1, -1, -1, 1)^t) > \ .$$

Para $\lambda_3 = -1$ tenemos que resolver $(C + I)x = 0$ y como

$$C + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_{\lambda_3} = Ker(C + I) =< (0, 1, 0, 0)^t) > \ .$$

Para $\lambda_4 = 2$ tenemos que resolver $(C - 2I)x = 0$ y como

$$C - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_{\lambda_4} = Ker(C - 2I) =< (-2, 1, 0, 0)^t) > \ .$$

Como A es diagonalizable tenemos que

$$\begin{aligned} A &= VDV^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

7.3. Suponga que el número siguiente es el promedio de los dos anteriores $g_{k+2} = (g_{k+1} + g_k)/2$.

(a) Determine A tal que $\begin{bmatrix} g_{k+2} \\ g_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} g_{k+1} \\ g_k \end{bmatrix}$.

(b) Determine $\lim_{n\to\infty} A^n$.

(c) Si $g_0 = a$ y $g_1 = b$ determine $\lim_{n\to\infty} g_n$.

Solución:

(a) Basta considerar $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Tenemos que

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm 3}{4}\,.$$

Los valores propios son distintos, entonces A es diagonalizable.
Para $\lambda_1 = 1$ tenemos que resolver $(A - I)\,x = 0$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Entonces,

$$W_{\lambda_1} = Ker(A - I) =< ((1,1)^t > \ .$$

Para $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ tenemos que resolver $\left(A + \frac{1}{2}I\right) x = 0$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Entonces,

$$W_{\lambda_2} = Ker\left(A + \frac{1}{2}I\right) =< (-1/2, 1)^t > \ .$$

Luego,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= VD^nV^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n(\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Como $(-1)^n$ es acotado y $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A^n &= \lim_{n\to\infty}(VD^nV^{-1}) \\ &= V(\lim_{n\to\infty} D^n)V^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(c) Notemos que

$$\begin{bmatrix} g_{k+2} \\ g_{k+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} g_{k+1} \\ g_k \end{bmatrix} = AA\begin{bmatrix} g_k \\ g_{k-1} \end{bmatrix} = \ldots = A^k\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} g_{k+2} \\ g_{k+1} \end{bmatrix} = \lim_{k\to\infty} A^k\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2b+a) \\ \frac{1}{3}(2b+a) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1}{3}(2b+a) .$$

7.4. Demuestre que si λ es un valor propio de una matriz A ortogonal entonces $\lambda \neq 0$ y λ^{-1} es valor propio de A.

Solución: Sabemos que A es ortogonal ssi $A^{-1} = A^t$, entonces existe la inversa de A. Sea v el vector propio asociado al valor propio λ, entonces

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\Leftrightarrow I_n v = \lambda A^{-1}v \\ &\Leftrightarrow (I_n - \lambda A^{-1})v = 0 . \end{aligned}$$

Como $v \neq 0$ entonces $|I_n - \lambda A^{-1}| = 0$.
Supongamos que $\lambda = 0$ entonces $|I_n| = 0$, lo cual es contradicción. Luego $\lambda \neq 0$ y observemos que

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\Leftrightarrow I_n v = \lambda A^{-1}v \\ &\Leftrightarrow \lambda^{-1}v = A^t v \end{aligned}$$

y como A y A^t tiene los mismos valores propios debido a que

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \\ (detA = detA^t) &= det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \\ &= det(A^t-\lambda I)\,. \end{aligned}$$

Se concluye que λ^{-1} es valor propio de A.

7.5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Encuentre una matriz X tal que $X^2 = A$.

(b) Encuentre una matriz B tal que $B^6 = A$.

(c) Calcule e^A.

(d) Calcule e^{At}, donde t es una variable real.

Solución: Primeros buscaremos los valores y vectores propios

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 6 & 7 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (9-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (9-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) \\ &= (9-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)\,. \end{aligned}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 1$ todos distintos luego A es diagonolizable.
Para $\lambda_1 = 9$ debemos resolver $(A-9I)x = 0$ un simple cálculo nos da

$$W_{\lambda_1} = Ker(A-9I) =< \{(0,0,1)^t\} > \,.$$

Para $\lambda_2 = 4$ debemos resolver $(A - 9I)x = 0$

$$W_{\lambda_2} = Ker(A - 4I) =< \{(1/2, 1, -2)^t\} > \ .$$

Para $\lambda_3 = 1$ debemos resolver $(A - 9I)x = 0$

$$W_{\lambda_3} = Ker(A - I) =< \{(-1, 1, -1/8)^t\} > \ .$$

Por lo tanto,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1/8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Sea $X = VD_XV^{-1} \Rightarrow X^2 = VD_X^2V^{-1} = A = VDV^{-1}$ luego $D = D_X^2$ por lo tanto

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 15/8 & 33/16 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45/8 & 99/16 & 9/2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 0 \\ 7/4 & 17/8 & 9/2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 7/2 & 17/4 & 9 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(b) Similarmente a letra (a), sea $B = VD_BV^{-1} \Rightarrow B^6 = VD_B^6V^{-1} = A = VDV^{-1}$ luego $D = D_B^6$ por lo tanto

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[6]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[6]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 15/8 & 33/16 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{15}{8}\sqrt[6]{9} & \frac{33}{16}\sqrt[6]{9} & \frac{3}{2}\sqrt[6]{9} \\ \sqrt[6]{4} & \sqrt[6]{4} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt[6]{4} + 1 & \frac{1}{2}(\sqrt[6]{4} - 1) & 0 \\ \sqrt[6]{4} - 1 & \sqrt[6]{4} + \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{15}{8}\sqrt[6]{9} - 2\sqrt[6]{4} + \frac{1}{8} & \frac{33}{16}\sqrt[6]{9} - 2\sqrt[6]{4} - \frac{1}{16} & \frac{3}{2}\sqrt[6]{9} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(c) Notemos que

$$\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^n}{n!}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(VIV^{-1} + VDV^{-1} + \frac{VD^2V^{-1}}{2!} + \frac{VD^3V^{-1}}{3!} + ... + \frac{VD^nV^{-1}}{n!}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} V\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + ... + \frac{D^n}{n!}\right)V^{-1} \\
&= V\lim_{n\to\infty}\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + ... + \frac{D^n}{n!}\right)V^{-1} \\
&= Ve^DV^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^9 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 15/8 & 33/16 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} e^4+2e & e^4-e & 0 \\ 2e^4-2e & 2e^4+e & 0 \\ \frac{15}{4}e^9-4e^4-\frac{1}{4}e & \frac{33}{8}e^9-4e^4+\frac{1}{8}e & 3e^9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(d) Similarmente a lo anterior obtenemos tenemos que

$$e^{At} = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} e^{4t}+2e^t & e^{4t}-e^t & 0 \\ 2e^{4t}-2e^t & 2e^{4t}+e^t & 0 \\ \frac{15}{4}e^{9t}-4e^{4t}-\frac{1}{4}e^t & \frac{33}{8}e^{9t}-4e^{4t}+\frac{1}{8}e^t & 3e^{9t} \end{pmatrix}.$$

7.6. Sea A de 3×3 simétrica con valores propios λ, $\lambda+1$ y $\lambda+2$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Demuestre que existe $a\in\mathbb{R}$ tal que la matriz $A+aI$ es positiva definida.

Solución: Si los valores propios de A son λ, $\lambda+1$ y $\lambda+2$, entonces los valores propios de $A+aI$ son $\lambda+a$, $\lambda+1+a$ y $\lambda+2+a$. Además, A es positiva definida si tiene todos sus valores propios positivos. Entonces debemos tener que $\lambda+a>0$ lo cual es equivalente a $a>-\lambda$.