PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 21: Conjuntos linealmente independientes y bases

1. Determine si los vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$. De los vectores que no formen una base, determine cuáles son linealmente independientes y cuáles generan a $\mathbb{R}^3$. Justifique sus respuestas.

   a) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

   b) $\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\5\\4\end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\3\\6\end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$.

2. Encuentre las bases para los espacios nulos de las matrices dadas.

   a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & -2\\0 & 1 & 1 & 4\\3 & -1 & -7 & 3\end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 5\\0 & 1 & 0 & -1 & -2\\0 & 0 & -8 & 0 & 16\end{bmatrix}$

3. Encuentre una base para el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ en la recta $y = -3x$.

4. Suponga que A es equivalente por filas a B. Encuentre las bases de espacio nulo y espacio columna de A.

   a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$, y también sea $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Es posible comprobar que $4\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = 0$. Utilice esta información para encontrar una base para H. Hay más de una respuesta.

6. Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ -14 \end{bmatrix}$. Es posible comprobar que $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$. Utilice esta información para encontrar una base para $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

7. Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una transformación lineal, y sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ un subconjunto de V.

   a) Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es linealmente dependiente en V, entonces el conjunto de imágenes $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)\}$ es linealmente dependiente en W.

   b) Suponga que T es una transformación uno a uno, de modo que la ecuación $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ siempre implica que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Demuestre que si el conjunto de imágenes $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. es linealmente dependiente. (*Este hecho muestra que una transformación lineal uno a uno mapea un conjunto linealmente independiente sobre un conjunto linealmente independiente*)