PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Ayudantía 8 - MAT1203

1. Considere el espacio vetorial $\mathbb{P}_3$ y $H = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 : p(1) = p(2) = p(0)\}$. Determine una base y la dimensión de H.

   Solución:

   Todos los polinomios del espacio $\mathbb{P}_3$ tienen la siguiente forma general,

   $$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

   Consideramos el espacio H como aquel que cumple con $p(1) = p(2) = p(0)$; reemplazando en la expresión anterior, obtenemos el siguiente sistema,

   $$\begin{aligned} p(0) &= d \\ p(1) &= a + b + c + d \\ p(2) &= 8a + 4b + 2c + d \end{aligned}$$

   como sabemos que deben ser iguales estas 3 expresiones, a partir de $p(0) = p(1)$ y $p(0) = p(2)$ llegamos a,

   $$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 8a + 4b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

   De la primera ecuación concluimos que $c = -(a+b)$, reemplazando esto en la segunda ecuación y operando,

   $$\begin{aligned} 8a + 4b - 2(a + b) &= 0 \\ 6a + 2b &= 0 \\ b &= -3a \end{aligned}$$

   reemplazando esta expresión para b en lo que obtuvimos de la primera ecuación,

$$c = -(a+b)$$
$$c = -(a-3a)$$
$$c = 2a$$

De esta manera, obtenemos una restricción para los coeficientes b y c en función de a, mientras que d queda como un parámetro libre, lo que se resume como,

$$a = a$$
$$b = -3a$$
$$c = 2a$$
$$d = d$$

Lo que quiere decir que nuestra expresión general para un polinomio perteneciente al espacio H se puede escribir como,

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - 3ax^2 + 2ax + d = a(x^3 - 3x^2 + 2x) + d * 1$$

Concluimos entonces que cualquier polinomio del espacio H puede ser generado a partir de la siguiente base,

$$\boxed{\{x^3 - 3x^2 + 2x, 1\}}$$

espacio que es de **dimensión 2**.

2. Sea $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   a) Demuestre que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   Solución:

   Para generar $\mathbb{R}_3$ necesitamos por lo menos 3 vectores, los cuales ya tenemos, lo que nos quedaría por demostrar es que estos son **linealmente independientes**. Para determinar que el conjunto de vectores sea linealmente independiente, utilizaremos el determinante de la matriz generada con estos vectores como columnas, si el determinante es distinto de 0, es porque el conjunto estudiado es linealmente independiente. La matriz sería entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El determinante de esta matriz es directo de calcular puesto que es una matriz **triangular**, por tanto, el determinante corresponde al producto de los elementos de su diagonal, dando como resultado 12, como es distinto de 0, estos vectores son **linealmente independientes**.

Dado que la dimensión de $\mathbb{R}_3$ es 3, y tenemos un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}_3$ linealmente independientes, estos son una base de dicho espacio.

b) Determine $\mathbf{x}$ tal que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución:

$[x]_{\mathcal{B}}$ quiere decir que el vector x tiene coordenadas $(-2, 1, -3)$ en la base $\mathcal{B}$, lo que se traduce en,

$$x = -2b_1 + 1 * b_2 - 3b_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Realizando la operación anterior llegamos al resultado de,

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} -14 \\ 22 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

c) Encuentre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Buscamos el vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ tal que,

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lo que puede ser escrito como una sistema de ecuaciones lineales de la siguiente forma,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Primero notamos que $x_3 = 1$ debido a la última fila, escribiendo el sistema anterior de forma explícita con x_1 y x_2 y reemplazando x_3 obtenemos,

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 3 &= -8 \\ 4x_2 - 6 &= 2 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $x_2 = 2$, reemplazando en la primera,

$$x_1 - 6 + 3 = -8$$

Obteniendo que $x_1 = -5$.

Es decir, el $[x]_{\mathcal{B}}$ buscado es,

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{1}$$

3. Determine la dimensión del espacio columna y del núcleo de la matriz A cuya forma escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

El **teorema del rango** nos permite relacionar la dimensión del espacio columna con la dimensión del espacio nulo según,

$$\text{Dim(Nul(A))} + \text{Dim(Col}(A)) = n$$

donde A es una matriz de $m \times n$.

Este teorema nos ayuda a facilitar el cálculo de la dimensión del espacio nulo, ya que la dimensión del espacio columna es directo de calcular, pues corresponde al número de columnas pivote de una matriz, en este caso 2.

Utilizando entonces el **teorema del rango**, calculamos la dimensión del espacio nulo,

$$\text{Dim(Nul(A))} + 2 = 5 \rightarrow \boxed{\text{Dim(Nul(A))} = 3}$$

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas demuéstrelo en general. Si es falsa muestre un contraejemplo.

   a) Si existe un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ que genera a V, entonces $\dim V \leq p$.

   Solución:

   La afirmación es **verdadera**.

Por definición, si un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ genera un espacio vectorial V, entonces cada vector de V puede escribirse como combinación lineal de los vectores de S, es decir:

$$V = \text{Gen}(S)$$

Según el **teorema del conjunto generador**, si un conjunto generador contiene más vectores que la dimensión del espacio, entonces existen dependencias lineales y se pueden eliminar vectores del conjunto sin afectar el espacio generado. Por lo tanto, el número mínimo de vectores necesarios para generar V es su dimensión, y cualquier conjunto generador debe contener al menos $\dim(V)$ vectores.

En consecuencia, si S genera V, debe cumplirse:

$$\boxed{\dim(V) \leq p}$$

En particular, si S es un conjunto generador **linealmente independiente**, entonces contiene exactamente $\dim(V)$ vectores. Agregar a ese conjunto vectores linealmente dependientes a los que ya se encontraban en S, no cambia el espacio generado, pero nunca se podrá generar V con menos de $\dim(V)$ vectores.

b) Si $p \geq 2$ y $\dim\ V = p$, entonces cada conjunto de $p - 1$ vectores distintos de cero es linealmente independiente.

Solución:

Esta afirmación es **falsa**.

No siempre se cumple y basta con encontrar un contraejemplo en donde un conjunto de vectores sean linealmente dependientes. Tomemos el caso de $\mathbb{R}_3$, el cual es un espacio de dimensión 3 (p). Tomemos el siguiente conjunto de 2 vectores ($p - 1$),

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

De este conjunto de vectores se concluye que $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, como $\vec{v}_2$ es combinación lineal de $\vec{v}_1$, son **linealmente dependientes**.

Habiendo encontrado un contraejemplo, demostramos que esta afirmación no siempre se cumple, por lo tanto es **falsa**.