Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2025

Álgebra Lineal - MAT1203
Ayudantía 10

1. Encuentre los valores propios de la matriz $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

Para encontrar los valores propios de una matriz A, resolvemos la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$.

Sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 0 \\ 5 & 8 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante (con la tercera columna):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (3-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 9-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)[(6-\lambda)(9-\lambda) - (-2)(-2)] \\ &= (3-\lambda)[54 - 6\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 4] \\ &= (3-\lambda)[\lambda^2 - 15\lambda + 50] \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero:

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 50) = 0$$

De esto, obtenemos el primer valor propio:

$$3 - \lambda = 0 \implies \lambda_1 = 3$$

Para el factor cuadrático, resolvemos $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$:

$$(\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0$$

Esto nos da los otros dos valores propios:

$$\lambda - 5 = 0 \implies \lambda_2 = 5\lambda - 10 = 0 \implies \lambda_3 = 10$$

Por lo tanto, los valores propios de la matriz son $\lambda = 3$, $\lambda = 5$ y $\lambda = 10$.

2. Determine h en la matriz A, tal que el espacio propio para $\lambda = 4$ sea bidimensional:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El espacio propio para $\lambda = 4$ es el espacio nulo de la matriz $(A - 4I)$. Para que este espacio sea bidimensional, el $Nul(A - 4I)$ debe ser 2. De esta manera, el rango de $(A - 4I)$ debe ser $n - Nul(A - 4I) = 4 - 2 = 2$.

Primero, formamos la matriz $(A - 4I)$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 4-4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2-4 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4-4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicamos operaciones de fila para escalonar la matriz: $F_2 \to F_2 + F_1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & h+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Para que el rango de esta matriz sea 2, debe tener exactamente dos pivotes. Los pivotes obvios están en la segunda columna (valor 2) y en la cuarta columna. Para que no haya un tercer pivote en la tercera columna, el elemento $h + 3$ debe ser cero. Si $h + 3 = 0 \implies h = -3$.

Verificamos con $h = -3$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicamos más operaciones de fila: $F_3 \to F_3/14$ y $F_4 \to F_4/(-2)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F_2 \to F_2 - 6F_3$, $F_4 \to F_4 - F_3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Intercambiando F_2 y F_3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene dos pivotes (en las columnas 2 y 4). Por lo tanto, su rango es 2. La nulidad de $(A-4I)$ es $4-\text{rango}(A-4I) = 4-2 = 2$. Así, el espacio propio para $\lambda = 4$ es bidimensional cuando $h = -3$.

El valor de h es -3.

3. Considere la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ sabiendo que sus valores propios son -2,-1 y 0.

   (a) ¿Porqué puede asegurar que A es diagonalizable?
   Una matriz $n \times n$ es diagonalizable si posee n vectores propios linealmente independientes. En este caso, la matriz A es de 3×3 y se nos proporcionan 3 valores propios distintos: -2, -1 y 0. Dado que el número de valores propios distintos es igual a la dimensión de la matriz, podemos asegurar que A es diagonalizable.

   (b) Diagonalice la matriz A, es decir, encuentre una matriz P invertible y una D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.
   La matriz diagonal D se forma con los valores propios en su diagonal principal:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Ahora, encontramos los vectores propios correspondientes:
   Para $\lambda_1 = -2$:
   Hay que resolver $(A-(-2)I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (A+2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$A+2I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   De donde $x - z = 0 \implies x = z$ y $-y + z = 0 \implies y = z$. Así, el vector propio es $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   Para $\lambda_2 = -1$:
   Hay que resolver $(A-(-1)I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (A+I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$A+I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   De donde $x - z = 0 \implies x = z$ y $-2y + z = 0 \implies z = 2y$. Sustituyendo, $x = 2y$.
   Así, el vector propio es $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   Para $\lambda_3 = 0$:
   Hay que resolver $(A-0I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde $z = 0$ y $x - y - z = 0 \implies x = y$. Así, el vector propio es $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

La matriz P se forma con estos vectores propios como columnas:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, hemos diagonalizado la matriz A con $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Determine una expresión para la potencia A^8.

Sabemos que si $A = PDP^{-1}$, entonces $A^k = PD^kP^{-1}$.

Primero, calculamos D^8:

$$D^8 = \begin{bmatrix} (-2)^8 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^8 & 0 \\ 0 & 0 & (0)^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculamos P^{-1}.

El determinante de P es: $\det(P) = 1(0-2) - 2(0-1) + 1(2-1) = -2 + 2 + 1 = 1$.

La inversa de P es la adjunta de P (ya que $\det(P) = 1$):

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculamos $A^8 = PD^8P^{-1}$:

$$\begin{aligned} A^8 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 256 & 2 & 0 \\ 256 & 1 & 0 \\ 256 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 256(-2) + 2(1) & 256(2) + 2(-1) & 256(1) \\ 256(-2) + 1(1) & 256(2) + 1(-1) & 256(1) \\ 256(-2) + 2(1) & 256(2) + 2(-1) & 256(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -510 & 510 & 256 \\ -511 & 511 & 256 \\ -510 & 510 & 256 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, la expresión para A^8 es:

$$A^8 = \begin{bmatrix} -510 & 510 & 256 \\ -511 & 511 & 256 \\ -510 & 510 & 256 \end{bmatrix}$$

4. Sea λ un valor propio de una matriz A invertible. Demuestre que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

   Por definición, existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que:

   $$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (*)$$

   Dado que A es invertible, su inversa A^{-1} existe. Multiplicamos la ecuación $(*)$ por A^{-1} por la izquierda:

   $$A^{-1}(A\mathbf{v}) = A^{-1}(\lambda\mathbf{v})$$

   Usando la propiedad asociativa de la multiplicación matricial y la linealidad:

   $$(A^{-1}A)\mathbf{v} = \lambda(A^{-1}\mathbf{v})$$

   $$I\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$$

   $$\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$$

   Como A es invertible, λ no puede ser cero. Si $\lambda = 0$ fuera un valor propio de A, significaría que $\det(A - 0I) = \det(A) = 0$, lo cual contradice el hecho de que A es invertible. Por lo tanto, $\lambda \neq 0$, y podemos dividir por λ:

   $$\frac{1}{\lambda}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v}$$

   Reordenando, tenemos:

   $$A^{-1}\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{v}$$

   Esta ecuación demuestra que $\mathbf{v}$ es un vector propio de A^{-1} con valor propio $\frac{1}{\lambda}$ (o λ^{-1}). Dado que $\mathbf{v}$ es no nulo (es un vector propio de A), también es un vector propio no nulo de A^{-1}. Por lo tanto, λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

5. Demuestre que si una matriz es idempotente (es decir, $A^2 = A$) entonces sus únicos valores propios pueden ser $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

   Sea λ un valor propio de A, y sea $\mathbf{v}$ su vector propio asociado no nulo.

   Por la definición de valor propio y vector propio, tenemos:

   $$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (*)$$

   Ahora, multiplicamos la ecuación $(*)$ por la matriz A por la izquierda:

   $$A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v})$$

   Aplicando la propiedad asociativa y linealidad:

   $$(A^2)\mathbf{v} = \lambda(A\mathbf{v})$$

   Dado que A es idempotente, $A^2 = A$. Sustituimos esto en la ecuación:

   $$A\mathbf{v} = \lambda(A\mathbf{v})$$

   Ahora, sustituimos $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (de la ecuación original $(*)$) en el lado derecho:

   $$\lambda\mathbf{v} = \lambda(\lambda\mathbf{v})$$

$$\lambda \mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}$$

Reorganizamos la ecuación para un lado:

$$\lambda^2 \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Factorizamos el escalar $\lambda^2 - \lambda$:

$$(\lambda^2 - \lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{v}$ es un vector propio, por definición $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Para que el producto sea el vector nulo, el escalar $(\lambda^2 - \lambda)$ debe ser cero:

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

Factorizamos λ:

$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

Esto implica que los únicos valores posibles para λ son:

$$\lambda = 0 \quad \text{o} \quad \lambda - 1 = 0 \implies \lambda = 1$$

Por lo tanto, los únicos valores propios posibles para una matriz idempotente son $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.