PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 22: Sistemas de coordenadas

1. Encuentre el vector $\mathbf{x}$ determinado por el vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ y la base $\mathcal{B}$.

   a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

   b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. Encuentre el vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{x}$ respecto de la base $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.

   a) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   b) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$.

3. Encuentre la matriz cambio de coordenadas de $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ a la base estándar en $\mathbb{R}^n$.

4. Utilice una matriz inversa para encontrar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.

5. El conjunto $\mathcal{B} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{p}(t) = 1 + 4t + 7t^2$ respecto de $\mathcal{B}$.

6. Utilice los vectores de coordenadas para probar la independencia lineal de los conjuntos de polinomios.

   a) $1 + 2t^3$, $2 + t - 3t^2$, $-t + 2t^2 - t^3$.

   b) $(1 - t)^2$, $t - 2t^2 + t^3$, $(1 - t)^3$.

7. Utilice los vectores de coordenadas para comprobar si los siguientes conjuntos de polinomios generan a $\mathbb{P}_2$. Justifique sus conclusiones.

   a) $1 - 3t + 5t^2$, $-3 + 5t - 7t^2$, $-4 + 5t - 6t^2$, $1 - t^2$.

   b) $5t + t^2$, $1 - 8t - 2t^2$, $-3 + 4t + 2t^2$, $2 - 3t$.

8. Sean $\mathbf{p}_1(t) = 1 + t^2$, $\mathbf{p}_2(t) = t - 3t^2$, $\mathbf{p}_3(t) = 1 + t - 3t^2$.

   a) Utilice vectores de coordenadas para demostrar que estos polinomios forman una base para $\mathbb{P}_2$.

   b) Considere la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ para $\mathbb{P}_2$. Encuentre $\mathbf{q}$ en $\mathbb{P}_2$, considerando que $\left[\mathbf{q}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.