Apuntes de Álgebra Lineal

Carolina B. Becerra O.

Enero 2015

Índice general

1. Vectores en $\mathbb{R}^n$ **5**

2. Sistemas de ecuaciones **11**

3. Matrices **15**

4. Determinantes **25**

5. Espacios vectoriales **27**

6. Transformaciones lineales **33**

7. Valores y vectores propios **39**

8. Ortogonalidad **43**

9. Matrices Simétricas **49**

Capítulo 1

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1. El conjunto de n tuplas ordenadas de números reales se denota por $\mathbb{R}^n$ y a sus elementos se les llama vectores.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ tal que } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

A $x_1, \ldots, x_n$ se les llama componentes o coordenadas del vector v. Al vector cuyas componentes son todas 0 se le llama vector nulo y se denota por $\overrightarrow{0}$.

Definición 1.2. Vectores canónicos:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \ , \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

Definición 1.3. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ la suma de u y v, denotada por $u + v$ es el vector cuyas componentes son la suma de las respectivas componentes de u y v. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, la ponderación de u por el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ es el vector cuyas componentes son el producto de α por las respectivas componentes de u. Es decir:

Si $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, entonces $u + v = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$, $\alpha u = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$.

Proposición 1.4. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces las operaciones anteriores satisfacen:

- $u + v \in \mathbb{R}^n$.
- $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- $u + v = v + u$.
- $u + \overrightarrow{0} = u$.
- $u + (-u) = \overrightarrow{0}$.
- $\alpha u \in \mathbb{R}^n$.
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.
- $1\ u = u$.

Observación 1.5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^n$. $\alpha u = \vec{0}$ si y sólo si $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}$.

Definición 1.6. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, el producto punto de u y v, denotado por $u \cdot v$, es la suma de los respectivos productos entre coordenadas. Es decir

$$\text{Si } u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ entonces } u \cdot v = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Proposición 1.7. Sea $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el producto punto satisface:

- $u \cdot v \in \mathbb{R}$.
- $u \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- $u \cdot v = v \cdot u$.
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.
- $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v$.

- $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \leftrightarrow u = \vec{0}$.

Ejemplo 1.8. $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 1.9. Norma de un vector: Dado $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = \sqrt{u \cdot u}$.

Definición 1.10. Vector unitario: vector que tiene norma 1.

Definición 1.11. Distancia entre vectores: $d(u, v) = \|u - v\|$.

Ejemplo 1.12. $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1 \ldots n$.

$d(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \sqrt{2} & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Proposición 1.13. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$. Entonces

- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.
- $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$.
- $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$.
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Definición 1.14. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. El ángulo θ entre dos vectores es tal que: $\cos(\theta) = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.

Ejemplo 1.15. $\theta(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \pi/2 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 1.16. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_m$ es el vector

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m,$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Definición 1.17. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto generado por S, denotado por Gen es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S.

Ejemplo 1.18. $\text{Gen}\{e_1, \dots e_n\} = \mathbb{R}^n$.

Proposición 1.19. Sean $S, S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

- $\text{Gen}\,\phi = \text{Gen}\{\overrightarrow{0}\} = \{\overrightarrow{0}\}$.
- $\overrightarrow{0} \in \text{Gen}\,S$.
- $\text{Gen}\,S$ es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalar.
- $S \subset \text{Gen}\,S$.
- $S_1 \subset S_2 \to \text{Gen}\,S_1 \subset \text{Gen}\,S_2$.
- $S_1 \subset \text{Gen}\,S_2 \to \text{Gen}\,S_1 \subset \text{Gen}\,S_2$.
- $\text{Gen}\,S = \text{Gen}\,\text{Gen}\,S$.

Teorema 1.20. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si v_1 es combinación lineal de $v_2, \dots, v_m$, entonces

$$\text{Gen}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{Gen}\{v_2, \dots, v_m\}$$

Definición 1.21. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- S es **linealmente dependiente** (LD) si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ no todos nulos tal que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$. (se puede construir al vector cero de manera no trivial).
- S es **linealmente independiente** (LI) si no es LD, es decir si para cualquier combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$, se tiene necesariamente que $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. (la única manera de construir al vector cero es la trivial).

Observación 1.22. Si $\vec{0} \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces S es LD.

Proposición 1.23. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

- S es LD si y sólo si existe un vector de S que es combinación lineal del resto de los vectores de S.

- S es LI si y sólo si todo subconjunto de S es LI.

Definición 1.24. Recta en $\mathbb{R}^2$. Sea $d \in \mathbb{R}^2$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.25. Recta en $\mathbb{R}^3$. Sea $d \in \mathbb{R}^3$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^3$ tal que $x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.26. Recta en $\mathbb{R}^n$. Sea $d \in \mathbb{R}^n$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.27. Plano en $\mathbb{R}^3$. Sea $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n$ L.I, $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = u + \alpha d_1 + \beta d_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que Π pasa por el origen.

Definición 1.28. Sean $u \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$. El hiperplano definido por u y b es $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = b\}$. Si $b = 0$, se dice que pasa por el origen.

Ejemplo 1.29. En $\mathbb{R}^4$ sea $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$ tal que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

$$x \in H \leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$x \in H \leftrightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Por lo tanto } H = \text{Gen}\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \}.$$

Observación 1.30. Todo hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el origen es un conjunto generado por $(n-1)$ vectores L.I. Todo hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es la suma de un vector posición y un conjunto generado por $(n-1)$ vectores L.I. Todo hiperplano en $\mathbb{R}^3$ es un plano en $\mathbb{R}^3$.

Observación 1.31. Problema importante: ¿ Todo plano en $\mathbb{R}^3$ es un hiperplano?

Observación 1.32. Problema importante: Dado un conjunto S y un vector b en $\mathbb{R}^n$. ¿$b \in \text{Gen}\, S$?

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones

Definición 2.1. Una matriz es un arreglo ordenado de m vectores de $\mathbb{R}^n$. Notación: $A = [v_1\ v_2\ \dots\ v_m]$. Se dice que A es una matriz de $n \times m$, donde m es el número de columnas y n es el número de filas.
Si $v_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ para $j = 1, \dots, m$, entonces $A = (a_{i,j})$, donde $a_{i,j}$ son los coeficientes o entradas de la matriz.

Definición 2.2. Matriz nula es tal que todos sus coeficientes son 0.

Definición 2.3. Matriz cuadrada es tal que $n = m$.

Definición 2.4. Matriz identidad es una matriz cuadrada denotada por I tal que $I = [e_1\ \dots\ e_n]$.

Definición 2.5. Dada $A = [v_1\ v_2\ \dots\ v_m]$ de $n \times m$ y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$, el producto de A por x es $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_mv_m\ \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.6. Sea A de $n \times m$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(x + y) = Ax + Ay$.
- $A(\alpha x) = \alpha Ax$.
- $A\vec{0} = \vec{0}$.

Observación 2.7. Todo sistema de ecuaciones se puede escribir de la forma matricial $Ax = b$.

Definición 2.8. Un sistema de ecuaciones $Ax = b$ es tal que A es una matriz de $n \times m$ asociada al sistema, $b \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^m$. $[A\ b]$ es la matriz ampliada del sistema.
El sistema es homogéneo si $b = \overrightarrow{0}$ y no homogéneo si $b \neq \overrightarrow{0}$. El sistema es consistente si tiene solución e inconsistente si no tiene solución.

Definición 2.9. Una matriz se dice que está en la forma escalonada (F.E.) si:

1. $a_{1,1} \neq 0$.
2. Si el pivote de la fila i está en la columna j, entonces el pivote de la fila $i+1$ está en la columna k, tal que $j < k$. (Pivote: primer elemento distinto de 0 de la fila).
3. Las filas nulas están al final de la matriz.

Definición 2.10. Una matriz se dice que está en la forma escalonada reducida (F.E.R.) si:

1. Está es la F.E.
2. Todos los pivotes son iguales a 1.
3. Los vectores columna que contienen pivotes son canónicos.

Definición 2.11. Dada una matriz, las operaciones fila son:

1. Tipo I: Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
2. Tipo II: Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $F_i \to \lambda F_i$.
3. Tipo III: (pivotear) Sumar a una fila, un múltiplo escalar de otra: $F_i \to F_i + \lambda F_j$.

Observación 2.12. Para solucionar un sistema de ecuaciones se lleva la matriz ampliada a su F.E. o a su F.E.R., usando operaciones fila, luego se reinterpreta el sistema y se resuelve recursivamente hacia arriba. Si el sistema es consistente, a las variables que quedan en posiciones no pivotes se les llama variables libres.

Observación 2.13. Lo anterior funciona pues si $[A|b] \sim [A'|b']$, entonces $Ax = b \leftrightarrow A'x = b'$.

Teorema 2.14. Sea el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con A de $n \times m$, y M la F.E.R. de la matriz $M = [A\ b]$.

Para $b \neq \vec{0}$, el sistema

- es inconsistente si y sólo si M tiene una fila de la forma $[0 \dots 0\ c]$ con $c \neq 0$,
- es consistente y tiene solución única si y sólo si M tiene m pivotes,
- es consistente y tiene infinitas soluciones si y sólo si M tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Para $b = \overrightarrow{0}$ el sistema es consistente ($\overrightarrow{0}$ es solución) y

- tiene solución única si y sólo si F.E. de A tiene m pivotes,
- tiene infinitas soluciones si y sólo si F.E. de A tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Definición 2.15. Rango de un sistema: número de pivotes de la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema. Rango de una matriz: número de pivotes de la forma escalonada del sistema homogéneo asociado a la matriz.

Teorema 2.16. Sea el sistema $Ax = b$, u tal que $Au = b$ y los conjuntos $C_1 = \{x : Ax = b\}$ y $C_2 = \{y : Ay = \vec{0}\}$. Entonces $x \in C_1$ si y sólo si $x - u \in C_2$.

Proposición 2.17. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y $A = [v_1 \dots v_m]$. S es L.I. si y sólo si el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene solución única.

Proposición 2.18. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y A una matriz cuyas filas son los vectores del conjunto S. S es L.I. si y sólo si la F.E. de la matriz A no tiene filas nulas.

Teorema 2.19. Sea $v_1, \dots, v_m$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Si $m > n$, entonces $v_1, \dots, v_m$ es L.D.

Observación 2.20. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$, $A = [v_1 \ldots v_m]$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces $b \in < v_1, \ldots, v_m >$ si y sólo si el sistema $Ax = b$ es consistente.

Observación 2.21. Sea A de $n \times m$ y $b_1, \ldots b_r \in \mathbb{R}^n$, para resolver $Ax = b_1, Ax = b_2, \ldots, Ax = b_r$ se escalona una única matriz $[A\ b_1\ b_2 \ldots b_r]$ y se interpreta la solución para cada sistema por separado.

Observación 2.22. Para buscar la intersección de n hiperplanos, se resuelve el sistema asociado a las n ecuaciones.

Capítulo 3

Matrices

Definición 3.1. Sea A una matriz de $n \times m$, se define una función $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$T_A(x) = Ax$$

Ejemplo 3.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $T_A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Observación 3.3. El dominio de esta función es $\mathbb{R}^m$. La imagen de $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ es $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 3.4. Sea A una matriz de $n \times m$, la función T_A se dice que es lineal pues para $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $T_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$,
- $T_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha T_A(x)$.

Observación 3.5. En adelante la función T_A se denotará por A.

Definición 3.6. $M_{n,m}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de $n \times m$ con coeficientes reales.

Definición 3.7. Sean $A = [v_1 \ \dots \ v_m], B = [u_1 \ \dots \ u_m] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. La operaciones suma y multiplicación por escalar de matrices se definen por $A + B = [v_1 + u_1 \ \dots \ v_m + u_m]$, $\alpha A = [\alpha v_1 \ \dots \ \alpha v_m]$.

Observación 3.8. $-1 \cdot A = -A$.

Proposición 3.9. Sean $A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A + B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + B = B + A$.
- $A + 0 = A$.
- $A + (-A) = 0$.
- $\alpha A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- $1\ A = A$.

Definición 3.10. Sea A de $n \times m$ y B de $m \times p$, tal que $B = [u_1\ \dots\ u_p]$, el producto de A por B es la matriz $A \cdot B = [A \cdot u_1\ \dots\ A \cdot u_p]$ de $n \times p$.

Proposición 3.11. Sean A, B, C matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(BC) = (AB)C$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $IA = AI = A$.
- $0A = A0 = 0$.

Observación 3.12. En general el producto de matrices no es conmutativo.
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BA$.

Definición 3.13. Sea A de $n \times m$, la trasnpuesta de A denotada por A^t es de $m \times n$ y es la matriz que resulta de intercambiar las filas de A por las columnas de la A.

Ejemplo 3.14. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Proposición 3.15. Sean A, B matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(A^t)^t = A$.
- $\alpha(A^t) = (\alpha A)^t$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.

Definición 3.16. Sea $A = (a_{i,j})$ de $n \times n$.

- A es triangular superior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i > j$.
- A es triangular inferior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i < j$.
- A es diagonal si $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.
- A es simétrica si $A = A^t$.
- A es antisimétrica si $A = -A^t$.

Definición 3.17. Sea A de $n \times m$.

- $\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = \overrightarrow{0}\}$. Es el conjunto de pre-imágenes del vector cero. Es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$.
- $\text{Im}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\}$. Es el recorrido de la función dada por la matriz A. Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consitente. Es el conjunto generado por las columnas de la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- $C(A)$ es el conjunto generado por las columnas de la matriz A. Es el recorrido de la función dada por la matriz A. Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consistente. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. (Está generado por las columnas de la matriz que en su forma escalonada están en las posiciones pivotes).

- $F(A)$ es el conjunto generado por las filas de la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. (Está generado por las filas no nulas de la forma escalonada de la matriz).

Observación 3.18. $\text{Im}(A) = C(A) = F(A^t)$.

Teorema 3.19. Sea A de $n \times m$. Entonces

- A es 1-1 (inyectiva) si y sólo si $\text{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.

- A es sobreyectiva si y sólo si $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.20. Sea A de $n \times m$. Entonces

Filas de A son L.D.
$\leftrightarrow$ Existe una fila que es combinación lineal del resto.
$\leftrightarrow$ $f_n = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1}$ (sin perder generalidad)
$\leftrightarrow$ La FER de A tiene por lo menos una fila nula (haciendo las operaciones del tipo III necesarias).

Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ La F.E.R. de A tiene no tiene filas nulas.
$\leftrightarrow$ Todas las filas de la F.E.R. de A contienen pivotes.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

A es 1-1
$\leftrightarrow$ $\text{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.
$\leftrightarrow$ $Ax = \overrightarrow{0}$ tiene solución única.
$\leftrightarrow$ Columnas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es m.

A es sobre
$\leftrightarrow$ $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
$\leftrightarrow$ $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
$\leftrightarrow$ $Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
$\leftrightarrow$ La FER de $[A\ e_1\ \dots e_n]$ no tiene filas de la forma $[0 \dots 0\ u]$ con u un vector no nulo.
$\leftrightarrow$ Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

Definición 3.21. A de $n \times n$ es invertible si existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = I$.

Teorema 3.22. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

A es invertible.
$\leftrightarrow$ Existe B tal que $AB = I$.
$\leftrightarrow$ Existen $u_1, \dots, u_n$ tal que $A[u_1 \dots u_n] = [e_1 \dots e_n]$.
$\leftrightarrow$ $Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
$\leftrightarrow$ A es sobre.
$\leftrightarrow$ Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

Observación 3.23. Para encontrar la inversa de una matriz, hay que escalonar la matriz $[AI]$ y resolviendo cada sistema se obtienen las columnas de la matriz B.

Teorema 3.24. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

A es invertible.
$\leftrightarrow$ Existe B tal que $BA = I$.
$\leftrightarrow$ $Ax = \vec{0}$ tiene solución única.
$\leftrightarrow$ A es inyectiva.
$\leftrightarrow$ Columnas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es m.

Observación 3.25. Sea A de $n \times n$. Si A es invertible, entonces su rango es n, luego existe B tal que . Además es única. La notación para la inversa de A es A^{-1}.

Proposición 3.26. Sean A y B de $n \times n$. Entonces

- A es invertible si y sólo si $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
- Si A es invertible, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A es invertible si y sólo si A^t es invertible. En este caso $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- Si A es invertible y $\alpha \neq 0$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces para todo $r \in \mathbb{N}$, A^r es invertible y se tiene $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r = A^{-r}$.
- Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Observación 3.27. Sean $A_1, \ldots, A_k$ matrices cuadradas e invertibles. Entonces $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = (A_k)^{-1} \cdot \ldots \cdot (A_1)^{-1}$.

Proposición 3.28. Sean A, B, C, D matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas. Entonces

- Si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $BA = CA$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $AB = BA$, entonces $BA^{-1} = A^{-1}B$.
- Si A es invertible, puede ocurrir que $A^{-1}BA \neq B$.
- Si A y B son invertibles, y $ACB = D$, entonces $C = A^{-1}DB^{-1}$.

Observación 3.29. Una matriz diagonal es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Observación 3.30. Una matriz triangular superior (o inferior) es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Ejemplo 3.31.
- Productos notables.
- Estudio de $u^t u$ y uu^t.
- Sea A, B de $n \times 1$ tal que $1 - A^t B \neq 0$. Demuestre que

$$(I - AB^t)^{-1} = I + \frac{1}{(1 - A^t B)} AB^t.$$

- La triangularidad se mantiene en el producto y al tomar inversas.

Definición 3.32. E_I (E_{II}, E_{III}) es una matriz elemental del tipo I (II, III), si es la matriz que resulta de hacer una operación elemental del tipo I (II, III) a la matriz identidad. Se dice que la matriz E representa dicha operación elemental.

Observación 3.33.

tipo	matriz	operación	transpuesta	operación	inversa	operación
I	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$
II	E_{II}	$F_i \to \lambda F_i$	E_{II}	$F_i \to \lambda F_i$	$\widetilde{E_{II}}$	$F_i \to 1/\lambda F_i$
III	E_{III}	$F_i \to F_i + \alpha F_j$	$\widetilde{E_{III}}$	$F_j \to F_j + \alpha F_i$	$\widetilde{\widetilde{E_{III}}}$	$F_i \to F_i - \alpha F_j$

Observación 3.34. Si A es de $n \times m$ y B es la matriz de $n \times m$ que resulta de hacerle a A una operación elemental, entonces $EA = B$, donde E es la matriz que representa dicha operación elemental.

Proposición 3.35. Si A es de $n \times m$ y B = F.E. de A, entonces $E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 A = B$, donde E_i son las matrices elementales que representan las operaciones elementales que llevan la matriz A en la matriz B.

Teorema 3.36. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si A se puede escribir como producto de matrices elementales.

Teorema 3.37. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si F.E.R de A es la matriz identidad

Observación 3.38. Se definen las operaciones elementales por columnas y se trabaja con la transpuesta.

Teorema 3.39. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A, tal que U se obtiene sin necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible, tal que

$$A = LU$$

Teorema 3.40. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A, tal que U se obtiene con la necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible y P una matriz producto de lementales del tipi I, tal que

$$PA = LU$$

Observación 3.41. Si $A = LU$, para resolver $Ax = b$ se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Observación 3.42. Si $PA = LU$, para resolver $Ax = b$ se multiplica el sistema por P y luego se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Definición 3.43. Si A es de $n \times n$ la forma cuadrática asociada a A es $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$q_A(v) = v^t A v$$

Observación 3.44. Si A es de $n \times n$, se tiene que

$$q_A = q_{A^t} = q_{\left(\frac{A+A^t}{2}\right)}$$

La matriz simétrica $B = \left(\dfrac{A + A^t}{2}\right)$, es la única tal que

$$q_A = q_B$$

En adelante las matrices que definen a formas cuadráticas serán cuadradas y simétricas.

Definición 3.45. Dada A de $n \times n$, la submatriz principal A_k para $k = 1, \ldots, n$ es la matriz que resulta de eliminar la últimas $n - k$ filas y las últimas $n - k$ columnas de A. Notar que $A_n = A$.

Proposición 3.46. Si A es de $n \times n$ y sus submatrices principales $A_1, \cdots, A_{n-1}$ son invertibles, entonces A admite la descomposición LU. Si L tiene sólo unos en su diagonal, entonces L y U son únicas.

Teorema 3.47. Sea $A = A^t$. Si $A = LU$, entonces existe D diagonal tal que $A = LDL^t$. (Entonces el signo de A es igual al signo de D).

Definición 3.48. Una matriz (o su forma cuadrática asociada) se dice:

- positiva definida si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) > 0$.

- negativa definida si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) < 0$.
- semidefinida positiva si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) \geq 0$.
- semidefinida negativa si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) \leq 0$.

Observación 3.49. Si D es diagonal, con elementos $d_1, \ldots, d_n$ en su diagonal, entonces D (o q_D) es

- positiva definida si $d_i > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- negativa definida si $d_i < 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- semidefinida positiva si $d_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- semidefinida negativa si $d_i \leq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Proposición 3.50. Sea $A = A^t$. Si A es positiva definida, entonces

- A es invertible.
- A_k es positiva definida, para todo $k = 1, \ldots, n$.
- A_k es invertible, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Teorema 3.51. Sea $A = A^t$. A es positiva definida si y sólo si existe L triangular inferior invertible con unos en su diagonal, y D diagonal, con elementos en la diagonal positivos, tal que $A = LDL^t$.

Observación 3.52. En el teorema anterior se define a $\sqrt{D}$ como la matriz diagonal, que en su diagonal tiene las raíces positivas de los elementos de la diagonal de D. Entonces

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = R^tR$$

que es llamada la descomposición con raíz cuadrada de una matriz positiva definida.

Ejemplo 3.53. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = LU \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^t \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^t R
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Determinantes

Definición 4.1. Determinante es una función: Det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que:

- $|I| = 1$
- Si $E_I A = B \to -|A| = |B|$
- Si $E_{II} A = B \to \lambda|A| = |B|$
- Si $E_{III} A = B \to |A| = |B|$

Observación 4.2. Tomando $A = I$ en la definición: $|E_I| = -1$, $|E_{II}| = \lambda$, $|E_{III}| = 1$. Reemplazando en la definición queda que si E es una matriz elemental, entonces $|EA| = |E| \cdot |A|$.

Observación 4.3. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $|A| = ad - bc$

Proposición 4.4. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si A tiene dos filas iguales, entonces $|A| = 0$.
- Si A tiene una fila nula, entonces $|A| = 0$.
- Si A es triangular o diagonal, entonces $|A| = \Pi a_{i,i}$.

Teorema 4.5. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

Teorema 4.6. Sean A y B matrices cuadradas. Entonces $|AB| = |A| \cdot |B|$. (Usar: A y B son invertibles si y sólo si AB es invertible.)

Proposición 4.7. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- $|A^t| = |A|$
- Si A es invertible, entonces $|A^{-1}| = 1/|A|$

Proposición 4.8. La función determinante es lineal en las filas y en las columnas.

Definición 4.9. Menor i, j de una matriz A es el determinante de la matriz que resulta de eliminar de A la fila i y la columna j. Notación: $M_{i,j} =$. Cofactor i, j de una matriz A es $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$

Teorema 4.10. $|A| = a_{i,1}C_{i,1} + \ldots + a_{i,n}C_{i,n}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. (caso $i = 1$)

Proposición 4.11. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si $PA = LU$, entonces $(-1)^k|A| = \Pi u_{i,i}$
- Si $A = LDL^t$, entonces $|A| = \Pi d_{i,i}$

Definición 4.12. Sea A una matriz de cuadrada. La adjunta de A: $\text{Adj}(A) = (c_{i,j})^t$.

Teorema 4.13. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces $A \cdot \text{Adj}(A) = \text{Adj}(A) \cdot A = |A|\ I$

Proposición 4.14. Sea A una matriz de cuadrada. Si A es invertible, entonces $A^{-1} = 1/|A|\ \text{Adj}(A)$

Proposición 4.15. Sea A una matriz simétrica. A es positiva definida si y sólo si, los determinantes de las submatrices principales son todos positivos.

Capítulo 5

Espacios vectoriales

Definición 5.1. Cuerpo o campo $K, +, \cdot$ conjunto tal que con las operaciones suma y multiplicación cumple:

- $+$ es cerrada: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha + \beta \in K$
- $+$ es asociativa: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- $+$ es conmutativa: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Existe un neutro para la $+$: $\exists 0 \forall \alpha : 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$
- Existe un inverso para la $+$: $\forall \alpha \exists \beta : \alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$
- $\cdot$ es cerrada: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha \cdot \beta \in K$
- $\cdot$ es asociativa: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- $\cdot$ es conmutativa: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- Existe un neutro para la $\cdot$: $\exists 1 \forall \alpha : 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$
- Existe un inverso para la $\cdot$: $\forall \alpha \neq 0 \exists \beta : \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Ejemplo 5.2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Definición 5.3. Un conjunto no vacío V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K si existen dos operaciones: suma y multiplicación por escalar tal que:

- $+$ es cerrada: $\forall u, v \in V \; u + v \in V$
- $+$ es asociativa: $\forall u, v, w \in V \; (u + v) + w = u + (v + w)$
- $+$ es conmutativa: $\forall u, v \in V \; u + v = v + u$
- Existe un neutro para la $+$: $\exists \vec{0}_V \forall u : \vec{0}_V + u = u + \vec{0}_V = u$
- Existe un inverso para la $+$: $\forall u \exists (-u) : u + (-u) = (-u) + u = \overrightarrow{0}$
- $\cdot$ es cerrada: $\forall u \in V, \alpha \in K \; \alpha \cdot u \in V$
- $\forall u, v \in V, \alpha \in K \; \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in K \; (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in K \; (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta u)$
- $\forall u \in V \; 1 \cdot u = u$

A los elementos de V se les llama vectores.

Ejemplo 5.4. Algunos espacios vectoriales:

- $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.
- $P_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $M_{n,m}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $C[a, b]$ sobre $\mathbb{R}$.

Proposición 5.5. Si V es un espacio vectorial sobre K, entonces

- $\vec{0}_V$ es único.
- $-(u + v) = (-u) + (-v)$.
- $-u$ es único.
- $\alpha \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V$.
- $0 \cdot u = \vec{0}_V$.
- $\alpha \cdot u = \vec{0}_V$ si y sólo si $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}_V$.

Definición 5.6. Una combinación lineal de vectores $v_1, \ldots, v_m$ es un vector de la forma $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$.

Ejemplo 5.7. En $C[0, \pi]$, $1 \cdot \text{sen}^2 + 1 \cdot \cos^2 = 1$.

Definición 5.8. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

- S es linealmente independiente si la única manera de construir al vector cero es la trivial:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0} \rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$$

- S es linealmente dependinete si es posible construir al vector cero de manera no trivial:

$$\exists \alpha_1, \ldots \alpha_m \text{ no todos nulos, tal que } \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$$

Observación 5.9. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Entonces

- S es LI si y sólo si todo subconjunto de S es LI.
- S es LD si y sólo si todo conjunto que contiene a S es LD.

Teorema 5.10. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. S es LD si y sólo si existe $v \in S$ que es combinación lineal del resto de los vectores de S.

Definición 5.11. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. El conjunto generado por S es $\text{Gen}\, S = \text{Gen}\{v_1, \ldots, v_m\} = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m, \text{ tal que } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$

Observación 5.12. $\{\vec{0}_V\}$ es L.D. y $\{\vec{0}_V\} = \text{Gen}\{\vec{0}_V\}$

Observación 5.13. Sean S_1 y S_2 conjuntos de vectores de un espacio vectorial V.

- Si $S_1 \subset S_2$, entonces $\text{Gen}\, S_1 \subset \text{Gen}\, S_2$
- Si $S_1 \subset < S_2 >$, entonces $\text{Gen}\, S_1 \subset \text{Gen}\, S_2$

Proposición 5.14. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. v_j es combinación lineal de vectores de $S \leftrightarrow \text{Gen}\, S = \text{Gen}\, S - \{v_j\}$

Proposición 5.15. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Si S es LI y $v \in < S >$, entonces v se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de S.

Definición 5.16. Sea V un espacio vectorial sobre K y $U \subseteq V$. U es un subespacio de V si es distinto del vacío y con las operaciones heredadas de V es un espacio vectorial. Notación: $U \leqslant V$

Proposición 5.17. $U \leqslant V$ si y sólo si U es no vacío, es cerrado bajo la suma y es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Observación 5.18. Todo conjunto generado es un subespacio.

Teorema 5.19. Sean U_1, U_2 subespacios de V. Entonces

- $U_1 \cap U_2$ es subespacio de V.
- $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \ : \ u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ es subespacio de V. Si en este caso, $U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, entonces se dice que la suma es directa y se denota: $U_1 \oplus U_2$.

Teorema 5.20. Si $V =< v_1, \ldots, v_n >$ tal que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es L.I., entonces todo conjunto L.I. de V contiene a lo más n elementos.

Definición 5.21. $B \subset V$ es una base de V si B es LI y $< B >= V$.

Teorema 5.22. Si B es una base de V y la cardinalidad de B es n, entonces todas las bases de V tienen n elementos. Se dice que la dimensión de V es n. Notación: $\text{Dim}(V) = n$.

Proposición 5.23. Si $\text{Dim}(V) = n$, entonces

- S es LI $\rightarrow \#S \leqslant n$.
- $< S >= V \rightarrow \#S \geqslant n$.

Proposición 5.24. Si $\text{Dim}(V) = n$ y $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

- S es LI $\rightarrow < S >= V$.
- $< S >= V \rightarrow S$ es L.I.

Observación 5.25. Si U es subespacio de V y $\text{Dim}(V) = n$, entonces $\text{Dim}(U) \leqslant \text{Dim}(V)$

Proposición 5.26. Sea A de $n \times m$. Entonces

- $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión igual al rango de A.
- $F(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ de dimensión igual al rango de A.
- A^t es de $m \times n$, $F(A^t) = C(A)$ y $C(A^t) = F(A)$.

Definición 5.27. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $v \in V$ tal que $v = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$. El vector coordenado de x en la base B es:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Proposición 5.28. Sean $u, v \in V$ y B una base de V. Entonces

- $[u + v] = [u] + [v]$.
- $[\alpha u] = \alpha[u]$.
- $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es L.I. si y sólo si $\{[u_1], \ldots, [u_m]\}$ es L.I.
- $u \in \text{Gen}\{u_1, \ldots, u_m\}$ si y sólo si $[u] \in \text{Gen}\{[u_1], \ldots, [u_m]\}$.

Definición 5.29. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de V. Se define la matriz $P_2^1 = [\ [v_1]_2 \ \ldots \ [v_n]_2\ ]$.

Proposición 5.30. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de V.

- Para todo $x \in V$: $P_2^1 \cdot [x]_1 = [x]_2$.
- P_2^1 es invertible.
- $(P_2^1)^{-1} = P_1^2$

Capítulo 6

Transformaciones lineales

Definición 6.1. Sean V y W espacios vectoriales. $T : V \to W$ es una transformación lineal si $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ y $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Proposición 6.2. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

- $T(\vec{0_V}) = \vec{0_W}$.
- $T(-v) = -T(v)$.

Observación 6.3. Si B es una base de V, entonces T queda determinada por cómo actúa sobre la base.

Definición 6.4. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- $\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = \overrightarrow{0_W}\}$.
- $\text{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V : T(v) = w\}$.

Proposición 6.5. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- $\text{Ker}(T)$ es un subespacio de V y su dimensión es la nulidad de T.
- $\text{Im}(T$ es un subespacio de W y su dimensión es el rango de T.

Observación 6.6. Si B es una base de V, entonces $\text{Gen}\, T(B) = \text{Im}(T)$.

Definición 6.7. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- Si T es inyectiva se dice que es un monomorfismo.
- Si T es sobre se dice que es un epimorfismo.
- Si T es inyectiva y sobre se dice que es un isomorfismo y se denota por $V \cong W$.

Teorema 6.8. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- T es inyectiva si y sólo si $\text{Ker}(T) = \{\vec{0_V}\}$.
- T es sobre si y sólo si $\text{Im}(T) = W$.

Proposición 6.9. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Si T es inyectiva y $S \subset V$ es L.I., entonces $T(S)$ es L.I.

Definición 6.10. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. La matriz de T con respecto a B_1 y B_2 es una matriz de $n \times m$ dada por

$$[T]_2^1 = [\ [T(v_1)]_2\ \ \ldots\ \ [T(v_m)]_2\ ]$$

Proposición 6.11. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. Entonces

- $[T]_2^1 \cdot [v]_1 = [T(v)]_2$, para todo $v \in V$.
- $v \in \text{Ker}(T)$ si y sólo si $[v]_1 \in \text{Ker}[T]_2^1$.
- $w \in \text{Im}(T)$ si y sólo si $[w]_2 \in \text{Im}[T]_2^1$.
- T es un isomorfismo ($V \cong W$) si y sólo si $[T]_2^1$ es cuadrada e invertible. En este caso T^{-1} es una transformación lineal y $([T]_2^1)^{-1} = [T]_1^2$.

Teorema 6.12. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\text{Dim Ker}(T) + \text{Dim Im}(T) = \text{Dim}(V).$$

Proposición 6.13. Sea V espacio vectorial de dimensión m y B_1 y B_3 bases de V. Sea W espacio vectorial de dimensión n y B_2 y B_4 bases de W. Hay dos matrices cambio de bases: P_3^1 y P_4^2.
Sea $T : V \to W$ y las dos matrices asociadas a T: $[T]_2^1$ y $[T]_4^3$.
Sean $x \in V, y \in W$. Entonces

- $[x]_3 = P_3^1 \cdot [x]_1$.
- $[y]_4 = P_4^2 \cdot [y]_2$.
- $[T]_2^1 \cdot [x]_1 = [T(x)]_2$.
- $[T]_4^3 \cdot [x]_3 = [T(x)]_4$.

Reemplazndo:

- $[T]_4^3 \cdot [x]_3 = [T(x)]_4$.
- $[T]_4^3 \cdot P_3^1 \cdot [x]_1 = P_4^2 \cdot [T(x)]_2$.
- $[T]_4^3 \cdot P_3^1 \cdot [x]_1 = P_4^2 \cdot [T]_2^1 \cdot [x]_1$.

Entonces $[T]_4^3 \cdot P_3^1 = P_4^2 \cdot [T]_2^1$

Esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & & [T]_2^1 & & \\ & V & \to & W & \\ & B_1 & & B_2 & \\ P_3^1 & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & P_4^2 \\ & V & \to & W & \\ & B_3 & & B_4 & \\ & & [T]_4^3 & & \end{array}$$

Ejemplo 6.14. Un ejemplo de la relación entre matriz cambio de base y matriz de una transformación lineal es:

- Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ con las siguientes bases:

  $$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

  $$B_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

  La matriz cambio de base P_3^1 es $P_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Sea $W = P_2(\mathbb{R})$ con las siguientes bases:

  $B_2 = \{1, 1+x, 1+x^2\} \quad B_4 = \{1, x, x^2\}$

  La matriz cambio de base P_4^2 es $P_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dada por

  $$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a+b) + (b+c)x + (c+d)x^2$$

- La matriz de T con respecto a las bases B_1 en V y B_2 en W es:

  $$[T]_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- La matriz de T con respecto a las bases B_3 en V y B_4 en W es:

  $$[T]_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in V$ y entonces:

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad [A]_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Luego $T(A) = 3 + 5x + 7x^2 \in W$ y entonces

$$[T(A)]_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad , \quad [T(A)]_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- Y se cumple $[T]_2^1 \cdot [A]_1 = [T(A)]_2 \quad$ y $\quad [T]_4^3 \cdot [A]_3 = [T(A)]_4$

Proposición 6.15. Sean T y L transformaciones lineales de V en W. Entonces $(T + L) : V \to W$ dada por $(T + L)(v) = T(v) + L(v)$ es una transformación lineal, y $(\alpha T) : V \to W$ dada por $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$ es una transformación lineal. Además $[T + L] = [T] + [L]$ y $[\alpha T] = \alpha[T]$.

Proposición 6.16. Sean $T : V \to W$ y $L : U \to V$ transformaciones lineales. Entonces $(T \circ L) : U \to W$ dada por $(T \circ L)(u) = T(L(u))$ es una transformación lineal, y $[T \circ L] = [T] \cdot [L]$.

Capítulo 7

Valores y vectores propios

Definición 7.1. Sea A de $n \times n$, $v \neq \vec{0}$ es un vector propio de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Se dice que λ es el valor propio de A asociado a v.

Proposición 7.2. Sea A de $n \times n$. λ es valor propio de A si y sólo si $|A - \lambda I| = 0$.

Definición 7.3. Sea A de $n \times n$. El polinomio característico de A es $p_A(x) = |xI - A|$.

Proposición 7.4. Sea A de $n \times n$. λ es valor propio de A si y sólo si λ es raíz de $p_A(x)$. La multiplicidad algebraica de λ es la multiplicidad como raíz de $p_A(x)$. (m.a.)

Observación 7.5. Sea A de $n \times n$. Si v_1 y v_2 son vectores propios asociados al valor propio λ, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αv_1 y $v_1 + v_2$ son vectores propios asociados a λ.

Proposición 7.6. Sea A de $n \times n$ y λ un valor propio de A. $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$ es el espacio propio asociado a λ. La dimensión de E_λ es la multiplicidad geométrica de λ.(m.g.). $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Teorema 7.7. Sea A de $n \times n$ y λ un valor propio de A. Entonces la m.g. de λ es menor o igual a la m.a. de λ.

Proposición 7.8. Sea A de $n \times n$. Entonces

- A tiene a lo más n valores propios.

- Si A es diagonal, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- Si A es triangular superior o inferior, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- A es no invertible si y sólo si 0 es valor propio de A.
- Si λ es valor propio de A, entonces λ^m es valor propio de A^m, para $m \in \mathbb{N}$.
- Si λ es valor propio de A y A es invertible, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.
- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A, entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$.

Observación 7.9. Considerando $|xI - A| = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0 = (x - z_1) \ldots (x - z_n)$ y tomando igualdad en los coeficientes c_0 y c_{n-1} se tiene:

- La traza de A es la suma de sus valores propios.
- El determinante de A es el producto de sus valores propios.

Definición 7.10. Dado un polinomio $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ y A matriz cuadrada, se define a $q(A)$ como la matriz $a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m$.

Observación 7.11. Dado un polinomio $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ y D matriz diagonal, se tiene que $q(D)$ es la matriz diagonal cuya diagonal se forma con los elementos de la diagonal de D evaluados en $q(x)$.

Teorema 7.12. Sea A matriz cuadrada. Entonces $p_A(A)$ es la matriz nula.

Definición 7.13. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. $v \neq \vec{0}$ es un vector propio de T si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Se dice que λ es el valor propio de T asociado a v.

Definición 7.14. Dos matrices cuadradas A y B se dicen similares si existe una matriz L invertible tal que $L^{-1}AL = B$.

Proposición 7.15. Si A y B son similares, entonces tienen los mismos valores propios (tienen el mismo polinomio característico). Si L es tal que $L^{-1}AL = B$ y v es vector propio de B asociado a λ, entonces Lv es vector propio de A asociado a λ.

Definición 7.16. Una matriz cuadrada A (o transformación lineal T) es diagonalizable si y sólo si es similar a una matriz diagonal.

Proposición 7.17. Si A y B son similares, entonces A es diagonalizable si y sólo si B es diagonalizable.

Teorema 7.18. A es diagonalizable si y sólo si existen n vectores propios L.I. de A.

Corolario 7.19. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Observación 7.20. Si A es diagonalizable, entonces A^m es diagonalizable, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observación 7.21. Si A es tal que $Au = \lambda u$, entonces $A^k u = \lambda^k u$. Luego $\lim\limits_{k\to\infty} A^k u = \left(\lim\limits_{k\to\infty} \lambda^k\right) u$.

Observación 7.22. Si $Av = \lambda v$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} A^k v =$

- 0 si $|\lambda| < 1$,
- v si $\lambda = 1$,
- no existe si $|\lambda| > 1$.

Observación 7.23. Sea A es diagonalizable y $q(x)$ un polinomio. Entonces

- $$A = L \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} L^{-1} \to q(A) = L \begin{bmatrix} q(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(d_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & q(d_n) \end{bmatrix} L^{-1}$$
- $$A = L \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} L^{-1} \to e^A = L \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix} L^{-1}$$

Capítulo 8

Ortogonalidad

Definición 8.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. V se dice que es un espacio vectorial con producto interno si existe una función $\cdot$ de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ tal que para todo $u, v \in V$, y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$
- $u \cdot u \geqslant 0$ y $u \cdot u = 0$ si y sólo si $u = \vec{0}$.

Definición 8.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno.

- Dados $u, v \in V$, u es ortogonal a v si $u \cdot v = 0$. Notación: $u \perp v$.
- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es ortogonal si el conjunto no contiene a $\vec{0}$ y $u_i \cdot u_j = 0$ para todo $i \neq j$
- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es ortonormal si el conjunto es ortogonal y $u_i \cdot u_i = 1, \forall i$.

Observación 8.3. En adelante se considera al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, con el producto punto usual.

Observación 8.4. $u \perp \vec{0}$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Observación 8.5. Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ortogonal y $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$, entonces

$$\alpha_i = \frac{u \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

Observación 8.6. Todo conjunto ortogonal es L.I., y por lo tanto una base de su conjunto generado.

Definición 8.7. Dado $U \leq \mathbb{R}^n$, el ortogonal a U es $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u \cdot w = 0\}$.

Proposición 8.8. Sea $\mathbb{R}^n$ con el producto punto usual.

- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U, entonces $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u_i \cdot w = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m\}$.
- $\vec{0} \in U^\perp$
- $U^\perp$ es un subespacio de R^n.
- $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^{n\perp} = \{\vec{0}\}$.
- $U^{\perp\perp} = U$
- $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$.
- Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base de U y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$. Entonces $U^\perp = \text{Ker}(A^t)$.
- $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, existen únicos $u \in U$ y $w \in U^\perp$ tal que $v = u + w$.

Proposición 8.9. Sea $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$. Entonces

- S es LI si y sólo si $A^t A$ es positiva definida.
- S es ortogonal si y sólo si $A^t A$ es diagonal y positiva definida.
- S es ortonormal si y sólo si $A^t A = I$.

Definición 8.10. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in U$ y $w \in U^\perp$ donde $v = u + w$.

- La proyección ortogonal sobre U es $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $P(v) = u$.
- La proyección ortogonal sobre $U^\perp$ es $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $Q(v) = w$.

Proposición 8.11. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in U$ y $w \in U^\perp$ donde $v = u + w$.

- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$, entonces $u = Ax$, donde x es tal que $A^t Ax = A^t v$.
- Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de $U^\perp$ y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \ldots w_r]$, entonces $w = By$, donde y es tal que $B^t By = B^t v$.

Proposición 8.12. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$, P la proyección ortogonal sobre U y Q la proyección ortogonal sobre $U^\perp$. Entonces

- P y Q son transformaciones lineales.
- $P + Q = I$ (como t.l.).
- $\mathrm{Ker}(P) = U^\perp$, $\mathrm{Im}(P) = U$.
- $\mathrm{Ker}(Q) = U$, $\mathrm{Im}(Q) = U^\perp$.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como t.l.).
- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$, entonces la matriz de P con respecto a la base canónica es $P = A(A^t A)^{-1} A^t$.
- Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de $U^\perp$ y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \ldots w_r]$, entonces la matriz de Q con respecto a la base canónica es $Q = B(B^t B)^{-1} B^t$.
- P y Q son simétricas.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como matrices).
- $P + Q = I$ (como matrices).
- $2P - I = R$ es matriz de reflexión, es simétrica y $R^2 = I$.

- P, Q y R son diagonalizables. Para P: $E_1 = U$ y $E_0 = U^\perp$. Para Q: $E_1 = U^\perp$ y $E_0 = U$. Para R: $E_1 = U$ y $E_{-1} = U^\perp$.

Proposición 8.13. Gram Schmidt: Dado $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ L.I., una base ortogonal de $< S >$ es $\{u_1, \ldots, u_m\}$, donde:

- $u_1 = v_1$
- $u_2 = v_2 - \dfrac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$
- $u_3 = v_3 - \dfrac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \dfrac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$
- ....

Observación 8.14. Descomposición QR.
Sea $A = [v_1 \cdots v_m]$ una matriz con columnas L.I. El problema es encontrar una matriz cuyas columnas formen un conjunto ortonormal que genere lo mismo que las columnas de A, es decir se busca una matriz Q tal que:

$$Q = [u_1 \cdots u_m], \ \ \mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Im}(A) \ \text{ y } \ Q^t Q = I.$$

Sea R la matriz cambio de base de $m \times m$, es decir $A = QR$. Entonces

$$A^t A = (QR)^t QR = R^t Q^t QR = R^t I R = R^t R.$$

Dado que A es inyectiva, luego $A^t A$ es positiva definida y basta tomar su descomposición con raíz cuadrada R. Obteniendo R se calcula $Q = AR^{-1}$.

Ejemplo 8.15. Sea $U =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} >$. Determine una base ortonormal de U.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$A^tA = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^tR$$

Luego $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Entonces $Q = \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Entonces $U = < \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} \\ 0 \\ 1\sqrt{3} \\ 1\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} \\ 0 \\ 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \end{bmatrix} >$

Proposición 8.16. Sea el sistema $Ax = b$ inconsistente y x^* tal que $\|Ax^* - b\|$ es mínima. Entonces x^* es tal que Ax^* es la proyección de b sobre $\mathrm{Im}(A)$.

Capítulo 9

Matrices Simétricas

Definición 9.1. U de $n \times n$ es ortogonal si $U^t U = I$.

Teorema 9.2. Sea P de $n \times n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- U es ortogonal.
- $\|Ux\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- $Ux \cdot Uy = x \cdot y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es ortonormal, entonces $\{Uv_1, \ldots, Uv_m\}$ es ortonormal.

Proposición 9.3. Sea A simétrica. Entonces

- A tiene sólo valores propios reales.
- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A tal que $v_1 \in E_{\lambda_1}$ y $v_2 \in E_{\lambda_2}$, entonces $v_1 \cdot v_2 = 0$.

Definición 9.4. Una matriz A se dice ortogonalmente diagonalizable si existe U ortogonal y D diagonal, tal que $U^t A U = D$.

Teorema 9.5. A es simétrica si y sólo si A es ortogonalmente diagonalizable.

Corolario 9.6. A simétrica es positiva definida si y sólo si todos sus valores propios son positivos.

Definición 9.7. Si A es simétrica y $v_1, \ldots, v_n$ son vectores propios (ortonormales) asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces la descomposición espectral de A es:
$A = \lambda_1 v_1 v_1^t + \ldots + \lambda_n v_n v_n^t$.

Observación 9.8. Si A es de $n \times m$, se tiene que

1. $\mathrm{Ker}(A^t A) = \mathrm{Ker}(A)$.
2. $\mathrm{Im}(A^t A) = \mathrm{Im}(A^t)$.

Teorema 9.9. Sea A de $n \times m$. Entonces existen U de $m \times m$ y V de $n \times n$ matrices ortogonales tal que

$$V^t A U = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & s_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Observación 9.10. ¿Cómo obtener U?

La matriz $A^t A$ es simétrica y semi definida positiva. Entonces existe U de $m \times m$ matriz ortogonal tal que

$$U^t A^t A U = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times m} \quad \text{con } d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_r > 0.$$

Sea U_1 matriz de $m \times r$ que contiene vectores propios de valores propios no nulos y U_2 matriz de $m \times (m - r)$ que contiene los vectores propios del valor propio 0. Entonces se tiene que:

- $U = [U_1 \; U_2]$.
- Los vectores columna de U_1 forman una base de $\mathrm{Im}(A^t A) = \mathrm{Im}(A^t)$.
- Los vectores columna de U_2 forman una base de $\mathrm{Ker}(A^t A) = \mathrm{Ker}(A)$.

- $(AU_1)^t(AU_1) = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{bmatrix}_{n\times m}$

Observación 9.11. ¿Cómo obtener V?

Sea V_1 de $n \times r$ la matriz $V_1 = AU_1\sqrt{D}^{-1}$.

Sea V_2 de $n \times (n-r)$ la matriz cuyas columnas completan una base ortogonal con las columnas de V_1.

Entonces se considera $V = [V_1\ V_2]$.