PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Ayudantía 6 - MAT1203

1. Usando cofactores determine el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución:

Elegimos la primera columna para facilitar el cálculo:

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 5(-1)^{1+1}M_1 + 0(-1)^{2+1}M_2 + (-5)(-1)^{3+1}M_3 + 0(-1)^{4+1}M_4$$

$$= 5(-1)^2 M_1 + (-5)(-1)^4 M_3 = 5M_1 - 5M_3$$

Cálculo de M_1

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Como la segunda columna es cero, $M_1 = 0$.

Cálculo de M_3

$$M_3 = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Expandiendo por la segunda columna:

$$M_3 = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -2\left(3(-6) - (-4)(5)\right)$$

$$= -2(-18 + 20) = -2(2) = -4$$

Resultado final

$$\det(A) = 5M_1 - 5M_3 = 5(0) - 5(-4) = 20$$

2. Si A y B son matrices invertibles de orden 3×3 tal que $\det(A) = -2$ y $\det(2A^3(B^{-1})^t) = -4$, calcule $\det(B)$.

Solución:

$$-4 = \det\left(2 \cdot A^3 \cdot (B^{-1})^t\right)$$
$$-4 = \det(2I) \cdot \det(A^3) \cdot \det\left((B^{-1})^t\right)$$

como I es 3×3, entonces

$$-4 = 2^3 \cdot \det(A^3) \cdot \det\left((B^{-1})^t\right)$$

como $\det(C^t) = \det(C)$, entonces:

$$-4 = 2^3 \cdot [\det(A)]^3 \cdot \det(B^{-1})$$
$$-4 = 2^3 \cdot (-2)^3 \cdot \frac{1}{\det(B)}$$
$$-4 = \frac{-2^3 \cdot 2^3}{\det(B)}$$

despejando $\det(B)$:

$$\det(B) = \frac{-2^3 \cdot 2^3}{-4} = \frac{-2^6}{-2^2} = 2^4 = 16$$

3. Si $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -2$, calcule

$$\det \begin{bmatrix} 2b & 0 & 4d \\ 1 & 2 & -2 \\ a+1 & 2 & 2(c-1) \end{bmatrix}$$

Solución:

Usando la segunda columna por el método de cofactores:

$$\det \begin{bmatrix} 2b & 0 & 4d \\ 1 & 2 & -2 \\ a+1 & 2 & 2(c-1) \end{bmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a+1 & 2(c-1) \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2b & 4d \\ a+1 & 2(c-1) \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2b & 4d \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(2b \cdot 2(c-1) - 4d(a+1)\right) - 2\left(-2 \cdot 2b - 4d \cdot 1\right)$$

$$= 2\left(4bc - 4b - 4ad - 4d\right) - 2(-4b - 4d)$$

$$= 8bc - 8b - 8ad - 8d + 8b + 8d$$

$$= -8(ad - bc)$$

$$= -8 \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -8 \cdot (-2) = 16$$

4. Sea A una matriz tal que

$$A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & s \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule el determinante de A^5.

b) ¿Para qué valores de $s \in \mathbb{R}$ la traspuesta de la matriz A, es decir A^T, es invertible?

Solución

a) Usando la primera fila y el método de cofactores:

$$\det(A^5) = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & s \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3((-1)(1) - (1)(1)) + s((1)(1) - (-1)(1))$$

$$= 3(-2) + s(2) = -6 + 2s$$

$$\Rightarrow \det(A^5) = 2s - 6$$

b) Sabemos que:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Para que A^T sea invertible, A debe ser invertible.

Para que A sea invertible, se requiere que $\det(A) \neq 0$.

Sabemos que:

$$\det(A^5) = [\det(A)]^5 = 2s - 6$$

$$\Rightarrow \det(A) = \sqrt[5]{2s - 6}$$

Para que $\det(A) \neq 0$ se requiere:

$$2s - 6 \neq 0 \Rightarrow s \neq 3$$

A^T es invertible si y solo si $s \neq 3$.

5. Use la Regla de Cramer para determinar el valor de x_3 que satisfaga el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -3x_1 + x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Solución

El sistema descrito corresponde a:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Usando la Regla de Cramer:

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Cálculo de $\det(A)$**:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 1(-3 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 2(-1) - (-6) = -2 + 6 = 4$$

Cálculo de $\det(A_3)$**:**

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_3) = -1\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -1((-3)(-3) - (0)(-8)) - (2(-8) - (-3)(1)) = -1(9) - (-16 + 3) = -9 - 13 = -14$$

Resultado:

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$