Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1203 - Álgebra Lineal
PAUTA Interrogación 1

Problema 1.

Determine para qué valores de $b \in \mathbb{R}$ la recta

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

está contenida en el plano de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 6$.

Solución:

Si para algún valor de b la recta estuviera contenida en el plano entonces en particular el vector posición $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ también debe estarlo. Pero este vector no satisface la ecuación del plano $x_1 - x_2 + x_3 = 6$. En conclusión, la recta L no está contenida en el plano para ningún valor de b.

Puntaje:

- 3 puntos por mostrar que hay algún punto de la recta que no pertenece al plano para ningún valor de b.
- 3 puntos por indicar que la recta no está contenida en el plano para ningún valor de b.

Problema 2.

Sea $S = \{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^5$. Demuestre que el conjunto $\{u + 2v, u + 3w\}$ es linealmente independiente.

Solución:

Sean $\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente de $\mathbb{R}^5$. Sean α y β escalares tales que

$$\alpha(u + 2v) + \beta(u + 3w) = \vec{0} \tag{1}$$

$$\implies (\alpha + \beta)u + (2\alpha)v + (3\beta)w = \vec{0}.$$

Como $\{u, v, w\}$ es LI entonces

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\implies \alpha = 0 \text{ y } \beta = 0.$$

Por lo tanto los vectores $u + 2v$ y $u + 3w$ son linealmente independientes.

Puntaje:

- 2 puntos por plantear ecuación vectorial (1).
- 2 puntos por plantear y resolver sistema de ecuaciones
- 2 puntos por concluir que los vectores $u + 2v$ y $u + 3w$ son LI.

Problema 3.

Sea A una matriz de 3×3 y $b \in \mathbb{R}^3$ tal que la matriz ampliada $[A \mid b]$ es equivalente a la siguiente matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2+r & s+4 \end{array}\right],$$

donde r y s son números reales. Determine todas las condiciones sobre r y s para que el sistema $Ax = b$:

- no tenga solución,
- tenga infinitas soluciones,
- tenga solución única.

Solución:

Notamos que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2+r & s+4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & r & s \end{array}\right].$$

Podemos concluir que si $r \neq 0$ entonces la matriz de coeficientes tiene 3 pivotes por lo que el sistema $Ax = b$ tiene única solución. Por otro lado, si $r = 0$ y $s = 0$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones ya que la tercera columna corresponde a una variable libre. Por último si $r = 0$ y $s \neq 0$ el sistema no tiene solución.

Puntaje:

- 1,5 puntos por escalonar correctamente.
- 1,5 puntos por justificar cuando el sistema no tiene solución.
- 1,5 puntos por justificar cuando el sistema tiene infinitas soluciones.
- 1,5 puntos por justificar cuando el sistema tiene única solución.

Problema 4.

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

- Determine un conjunto de vectores linealmente independiente que genere a $\text{Nul}(A)$.
- Determine un conjunto de vectores linealmente independiente que genere a $\text{Im}(A)$.
- Determine justificadamente si A es inyectiva.
- Determine justificadamente si A es sobreyectiva.

Solución:
Buscamos la forma escalonada reducida de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que cada vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $Ax = \vec{0}$ debe cumplir que

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto $Nul(A) = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Más aún, esto implica que A no es inyectiva.

Por otro lado, las primeras dos columnas de la F.E.R de A son columnas pivotes lo que significa que las primeras dos columas de A son vectores generadores linealmente independientes de $Col(A)$, es decir, $Im(A) = Col(A) = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. A su vez esto implica que A no es sobreyectiva ya que $Im(A) \neq \mathbb{R}^4$.

Nota: También se puede formar la F.E.R de A^T para determinar un conjunto de vectores linealmente independiente que genere a $Im(A)$.

Puntaje:

- 1,5 puntos por determinar generadores LI de $Nul(A)$.
- 1,5 puntos por determinar generadores LI de $Im(A)$.
- 1,5 puntos por justificar que A no es inyectiva.
- 1,5 puntos por justificar que A no es sobreyectiva.

Problema 5.

Sea A una matriz tal que $A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Demuestre que A es sobreyectiva.

Solución:

Notamos primero que $Im(A)\subset\mathbb{R}^2$. Recordemos que A es sobreyectiva si y sólo si $Ax=e_i$ es consistente para cada vector canónico e_i. Ya que

$$e_1=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=A\left(3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix}$$

y también

$$e_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=A\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

podemos concluir que $Ax=e_1$ y $Ax=e_2$ son sistemas consistentes, por lo que A es una matriz sobreyectiva.

Nota: También se puede argumentar de la siguiente forma:
Los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ son linealmente independiente pues no son múltiplos el uno del otro. Por lo tanto cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como una combinación lineal de estos dos vectores. Esto es, para cada $v\in\mathbb{R}^2$ entonces existen a y b números reales tales que $v=a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$A\left(a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)=v.$$

Esto implica que A es sobreyectiva.

Puntaje:

- 3 puntos por establecer algún criterio que caracteriza a una matriz sobreyectiva.
- 3 puntos por comprobar correctamente el criterio antes mencionado.

Problema 6.

Determine, justificadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Existe una transformación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$.

b) Considere una matriz A de tamaño 4×5. Si la solución del sistema lineal homogéneo $Ax = \vec{0}$ tiene dos generadores linealmente independientes, entonces el rango de la matriz A debe ser 2.

Solución:

a) Falso. Si $T : \mathbb{R}^4 \to R^3$ es una transformación lineal entonces su matriz asociada es de 3×4 cuya F.E.R. tiene a lo más 3 columnas pivotes. Esto implica que el núcleo tiene al menos un generador por lo que T no es inyectiva.

b) Falso. Si el conjunto solución de $Ax = \vec{0}$ tiene dos generadores LI entonces la F.E.R. de A tiene 3 columnas pivotes. Esto implica que el rango de A es 3.

Puntaje:

- 1,5 puntos por determinar que la afirmación (a) es falsa.
- 1,5 puntos por justificar su respuesta anterior.
- 1,5 puntos por determinar que la afirmación (b) es falsa.
- 1,5 puntos por justificar su respuesta anterior.