PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 25: Cambio de base

1. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases para un espacio vectorial V y suponga que $\mathbf{b}_1 = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{b}_2 = 9\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2$.

   (a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

   (b) Encuentre $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{C}}$ para $\mathbf{x} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. (Utilice el inciso a).

2. Sean $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases para V, y sea P una matriz cuyas columnas son $\left[\mathbf{u}_1\right]_{\mathcal{W}}$ y $\left[\mathbf{u}_2\right]_{\mathcal{W}}$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones satisface P para toda $\mathbf{x}$ en V?

   i. $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{U}} = P\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{W}}$

   ii. $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{W}} = P\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{U}}$

3. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y suponga que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.

   (a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

   (b) Determine $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

4. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases para $\mathbb{R}^2$. En cada ejercicio, encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

   (a) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (b) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. En $\mathbb{P}_2$, encuentre la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B} = \{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\}$ a la base estándar de $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$. Luego, encuentre el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas para $-1 + 2t$.