PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Ayudantía 9 - MAT1203

1. El conjunto $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{p}(t) = 6 + 3t - t^2$ en relación con $\mathcal{B}$

   Solución:

   Para encontrar el vector de coordenadas de $p(t) = 6 + 3t - t^2$ en relación con la base $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$, necesitamos encontrar los escalares c_1, c_2, c_3 tales que:

   $$p(t) = c_1(1+t) + c_2(1+t^2) + c_3(t+t^2)$$

   Sustituyendo $p(t)$:

   $$6 + 3t - t^2 = c_1(1+t) + c_2(1+t^2) + c_3(t+t^2)$$

   Expandimos el lado derecho de la ecuación:

   $$6 + 3t - t^2 = c_1 + c_1t + c_2 + c_2t^2 + c_3t + c_3t^2$$

   Agrupamos los términos por potencias de t:

   $$6 + 3t - t^2 = (c_1 + c_2) + (c_1t + c_3t) + (c_2t^2 + c_3t^2)$$

   $$6 + 3t - t^2 = (c_1 + c_2) + (c_1 + c_3)t + (c_2 + c_3)t^2$$

   Ahora, igualamos los coeficientes de las potencias correspondientes de t de ambos lados de la ecuación para formar un sistema de ecuaciones lineales:

   a) Coeficientes constantes: $c_1 + c_2 = 6$

   b) Coeficientes de t: $c_1 + c_3 = 3$

   c) Coeficientes de t^2: $c_2 + c_3 = -1$

   Podemos resolver este sistema de ecuaciones. De la ecuación (1), podemos expresar c_1 como $c_1 = 6 - c_2$.
   Sustituimos esta expresión para c_1 en la ecuación (2):

   $$(6 - c_2) + c_3 = 3$$

   $$-c_2 + c_3 = 3 - 6$$

   $$-c_2 + c_3 = -3 \quad (*)$$

   Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con c_2 y c_3:

   $$c_2 + c_3 = -1 \quad (3)$$
   $$-c_2 + c_3 = -3 \quad (*)$$

Sumamos la ecuación (3) y la ecuación (*):

$$(c_2 + c_3) + (-c_2 + c_3) = -1 + (-3)$$

$$2c_3 = -4$$

$$c_3 = \frac{-4}{2}$$

$$c_3 = -2$$

Sustituimos el valor de $c_3 = -2$ en la ecuación (3):

$$c_2 + (-2) = -1$$

$$c_2 - 2 = -1$$

$$c_2 = -1 + 2$$

$$c_2 = 1$$

Finalmente, sustituimos el valor de $c_2 = 1$ en la ecuación $c_1 = 6 - c_2$:

$$c_1 = 6 - 1$$

$$c_1 = 5$$

Así, los escalares son $c_1 = 5$, $c_2 = 1$, y $c_3 = -2$.
El vector de coordenadas de $p(t)$ en relación con la base $\mathcal{B}$ es:

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para verificar el resultado:

$$5(1 + t) + 1(1 + t^2) - 2(t + t^2) = 5 + 5t + 1 + t^2 - 2t - 2t^2$$

$$= (5 + 1) + (5t - 2t) + (t^2 - 2t^2)$$

$$= 6 + 3t - t^2$$

Esto coincide con el polinomio $p(t)$ dado.

Por lo tanto, el vector de coordenadas de $p(t) = 6 + 3t - t^2$ en relación con la base $\mathcal{B}$ es:

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Alternativamente,podemos representar los vectores de la base $\mathcal{B}$ y el polinomio $p(t)$ en términos de la base estándar de P_2, $\{1, t, t^2\}$.

- $v_1 = 1 + t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 constante, 1 t, 0 t^2)
- $v_2 = 1 + t^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1 constante, 0 t, 1 t^2)
- $v_3 = t + t^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0 constante, 1 t, 1 t^2)
- $p(t) = 6 + 3t - t^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (6 constante, 3 t, -1 t^2)

La ecuación vectorial $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = p(t)$ se convierte en:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 1c_1 + 1c_2 + 0c_3 &= 6 \\ 1c_1 + 0c_2 + 1c_3 &= 3 \\ 0c_1 + 1c_2 + 1c_3 &= -1 \end{aligned}$$

La matriz aumentada correspondiente es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Resolviendo este sistema obtenemos el mismo resultado.

2. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y suponga que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.

   a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

   b) Determine $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

   Solución:

   a) La matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$, denotada como $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, tiene como columnas los vectores de coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{A}$ expresados en términos de la base $\mathcal{B}$.

   A partir de las ecuaciones dadas, podemos escribir los vectores de coordenadas de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ con respecto a la base $\mathcal{B}$:

- Para $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - 1\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3$, el vector de coordenadas es $[\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Para $\mathbf{a}_2 = -1\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 + 1\mathbf{b}_3$, el vector de coordenadas es $[\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Para $\mathbf{a}_3 = 0\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$, el vector de coordenadas es $[\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ se forma colocando estos vectores de coordenadas como columnas:

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Se nos da el vector $\mathbf{x}$ expresado en términos de la base $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3$$

El vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a la base $\mathcal{A}$ es:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, utilizamos la relación:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$$

Sustituyendo los valores que tenemos:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos la multiplicación de matrices:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (4)(3) + (-1)(4) + (0)(1) \\ (-1)(3) + (1)(4) + (1)(1) \\ (0)(3) + (1)(4) + (-2)(1) \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 12 - 4 + 0 \\ -3 + 4 + 1 \\ 0 + 4 - 2 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ es:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esto significa que $\mathbf{x} = 8\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$.

3. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ bases para V y sea $P = [[\mathbf{d}_1]_{\mathcal{A}} [\mathbf{d}_2]_{\mathcal{A}} [\mathbf{d}_3]_{\mathcal{A}}]$ ¿Cuál de las siguientes ecuaciones satisface P para toda $\mathbf{x}$ en V ?

   i. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$ ii. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$

   Solución:

   Esta definición de P corresponde a la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{D}$ a la base $\mathcal{A}$. Se denota comúnmente como $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{D}}$.

   La fórmula general para el cambio de coordenadas de un vector $\mathbf{x}$ de la base $\mathcal{D}$ a la base $\mathcal{A}$ utilizando la matriz $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{D}}$ es:

   $$[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{D}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$$

   Dado que en el problema $P = \begin{pmatrix} [\mathbf{d}_1]_{\mathcal{A}} & [\mathbf{d}_2]_{\mathcal{A}} & [\mathbf{d}_3]_{\mathcal{A}} \end{pmatrix}$, entonces P es precisamente $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{D}}$.

   Por lo tanto, la ecuación que satisface P para toda $\mathbf{x}$ en V es:

   $$[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$$

   Esta corresponde a la opción **i**.

   Análisis de la opción ii: La opción ii es $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$. Si la ecuación correcta es $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$, entonces para despejar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$, necesitaríamos multiplicar por la inversa de P (asumiendo que P es invertible, lo cual es cierto si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son bases):

   $$P^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P^{-1}P[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$$

   $$P^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = I[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$$

   $$[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = P^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$$

   La matriz P^{-1} sería la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{D}$, es decir, $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{A}}$. Entonces, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$. Como $P = P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{D}}$, la opción ii. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$ sería correcta si $P = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{A}}$, lo cual contradice la definición dada de P.

   Por lo tanto, la única ecuación correcta es la opción i.

4. Considere $\mathbb{P}_1 = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$, el espacio de polinomios de grado menor o igual a uno y sean $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - 2x\}$ y $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ bases para $\mathbb{P}_1$. Si la matriz

   $$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   es la matriz de cambio de coordenaads de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Determine w_1 y w_2.

Solución

Por definición, las columnas de la matriz de cambio de coordenadas $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son los vectores de coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$ expresados en términos de la base $\mathcal{C}$. Es decir:

- La primera columna de P es $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}$:

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Esto implica que $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{w}_1 - 1\mathbf{w}_2$.

- La segunda columna de P es $[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}$:

$$[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Esto implica que $\mathbf{b}_2 = 3\mathbf{w}_1 + 1\mathbf{w}_2$.

Sustituimos los polinomios $\mathbf{b}_1 = 1 + x$ y $\mathbf{b}_2 = 1 - 2x$ en estas ecuaciones:

$$1 + x = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \qquad (1) \qquad (1)$$
$$1 - 2x = 3\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \qquad (2) \qquad (2)$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas vectoriales ($\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$). Podemos resolver este sistema.

Sumamos la ecuación (1) y la ecuación (2) para eliminar $\mathbf{w}_2$:

$$(1 + x) + (1 - 2x) = (2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + (3\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$$

$$2 - x = 5\mathbf{w}_1$$

Despejamos $\mathbf{w}_1$:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{2 - x}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$$

Ahora, sustituimos la expresión de $\mathbf{w}_1$ en la ecuación (2) (también podríamos usar la ecuación (1)):

$$1 - 2x = 3\left(\frac{2 - x}{5}\right) + \mathbf{w}_2$$

$$1 - 2x = \frac{6 - 3x}{5} + \mathbf{w}_2$$

Despejamos $\mathbf{w}_2$:

$$\mathbf{w}_2 = (1 - 2x) - \left(\frac{6 - 3x}{5}\right)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{5(1 - 2x)}{5} - \frac{6 - 3x}{5}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{5 - 10x - (6 - 3x)}{5}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{5 - 10x - 6 + 3x}{5}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{-1-7x}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}x$$

Por lo tanto, los polinomios que forman la base $\mathcal{C}$ son:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$$

$$\mathbf{w}_2 = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}x$$

Método alternativo usando la matriz inversa: La matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ es $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de P es $\det(P) = (2)(1) - (3)(-1) = 2 + 3 = 5$. La inversa de P es:

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Las columnas de $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ son $[\mathbf{w}_1]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{w}_2]_{\mathcal{B}}$.

$$[\mathbf{w}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \implies \mathbf{w}_1 = \frac{1}{5}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{b}_2$$

$$[\mathbf{w}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \implies \mathbf{w}_2 = -\frac{3}{5}\mathbf{b}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{b}_2$$

Sustituyendo $\mathbf{b}_1 = 1 + x$ y $\mathbf{b}_2 = 1 - 2x$:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{5}(1+x) + \frac{1}{5}(1-2x) = \frac{1+x+1-2x}{5} = \frac{2-x}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$$

$$\mathbf{w}_2 = -\frac{3}{5}(1+x) + \frac{2}{5}(1-2x) = \frac{-3(1+x)+2(1-2x)}{5} = \frac{-3-3x+2-4x}{5} = \frac{-1-7x}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}x$$

Ambos métodos conducen al mismo resultado.