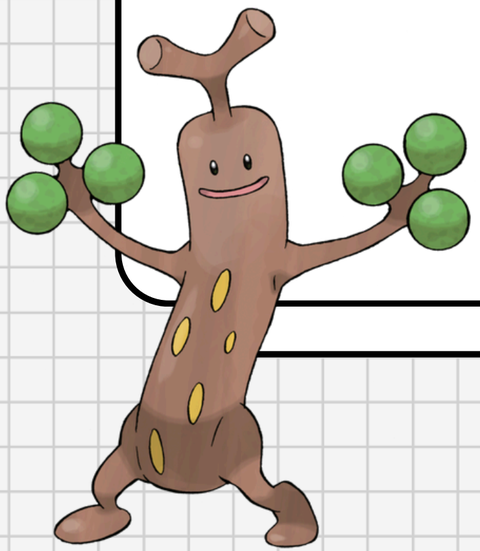
Ayudantía N° 7

2-3 + Rojo-Negro



Repaso

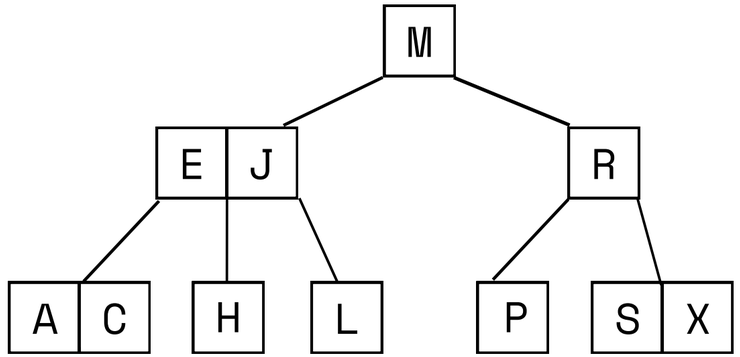
Definición

Árboles 2-3

Un árbol 2-3 es un árbol de búsqueda donde cada nodo puede ser:

2-nodo:
- 1 llave
- 2 hijos (Izq: claves < k. Der: claves > k)

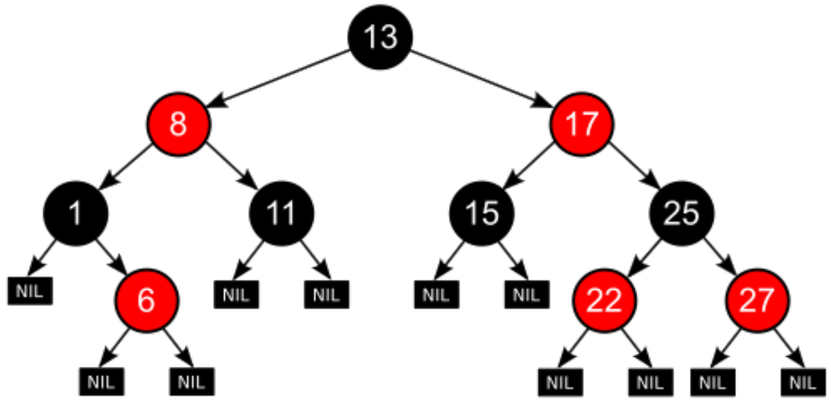
3-nodo:
- 2 llaves ordenadas ($k_1 < k_2$)
- 3 hijos (Izq: < k. Centro: k_1 < claves < k. Der: > k_2)



Definición

Árboles Rojo-Negro

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, entonces sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros en el camino a cada hoja debe ser la misma (esta es la noción del balance)



- Los nodos nulos/hojas vacías se consideran negros
- Las inserciones son con nodos rojos

Árbol rojo-negro: inserción

Definición

1

Los nodos siempre se insertan como rojos

2

Si su padre es rojo ocurre una de dos cosas:

Si su tío es rojo, se da el caso en que 2-4 rebalsa. Esto se soluciona cambiando la coloración, lo que puede generar el mismo caso hacia arriba

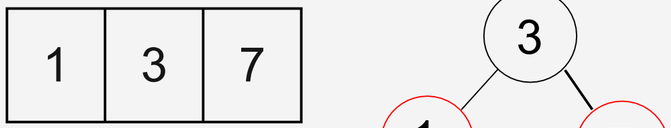
Si su tío es negro, se tiene un aumento de grado en el nodo 2-4. Esto se soluciona con rotaciones y cambios de color. (Los nodos nulos se consideran negros)

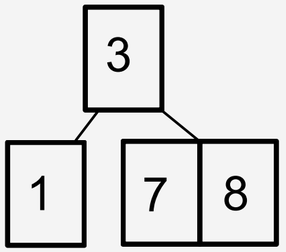
- Un árbol rojo-negro es una representación binaria de un árbol 2-4

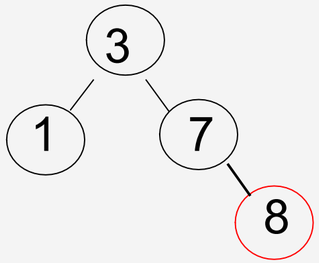
Definición

Árbol rojo-negro: inserción

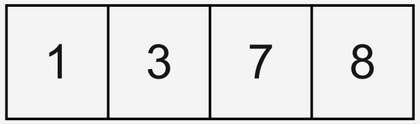
Si su tío es **rojo**, se da el caso en que 2-4 rebalsa. Esto se soluciona cambiando la coloración del padre, tío y abuelo, lo que puede generar el mismo caso hacia arriba.

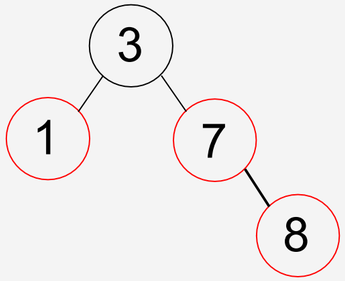






*3 sigue negro
porque es la **raíz**

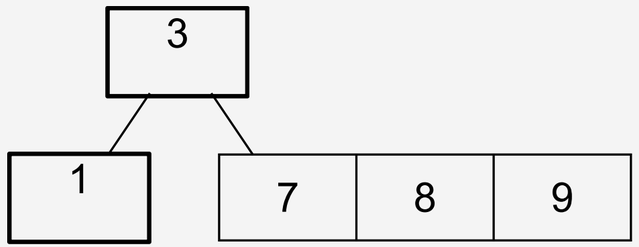


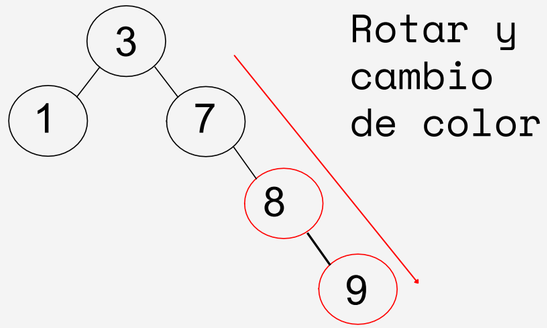


Definición

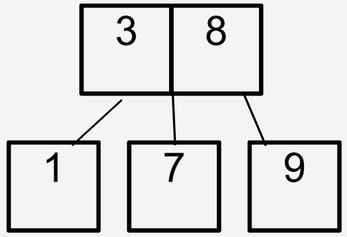
Árbol rojo-negro: inserción

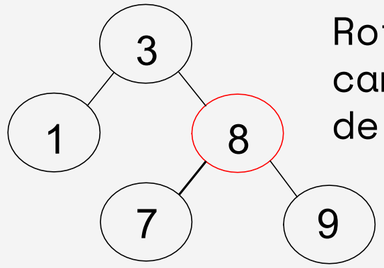
Si su tío es **negro**, se tiene un aumento de grado en el nodo 2-3. Para corregirlo, se realizan rotaciones sobre el abuelo y se ajustan los colores de los nodos involucrados, en particular cambiando el color del nodo insertado. Cabe recordar que los nodos nulos se consideran negros.





Rotar y
cambio
de color





Rotar y
cambio
de color

Ejercicio 1

A partir del árbol 2-3 A, inicialmente vacío, inserte los siguientes elementos en el árbol A, representando gráficamente cada paso y las operaciones relevantes para mantener la propiedad de árbol 2-3 luego de cada inserción: X, D, Y, R, W, M, C, G.

Pregunta 2 a) I1-2025-2

Ejercicio 1 - Solución

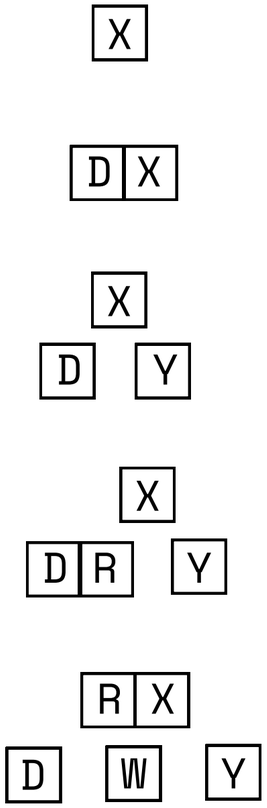
1. Insertar X: Árbol vacío, se inserta un nodo 2 como raíz del árbol

2. Insertar D: Hay espacio en el nodo hoja (raíz), pasa a nodo 3, llaves ordenadas

3. Insertar Y: El nodo colapsa -> Split, llave central se lleva al nivel superior, aumento de altura

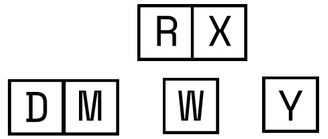
4. Insertar R: Nodo hoja tiene espacio, pasa a nodo 3, llaves ordenadas

5. Insertar W: Nodo [D|R] colapsa -> Split, llave central al nivel superior, hay espacio, pasa a nodo 3, llaves ordenadas

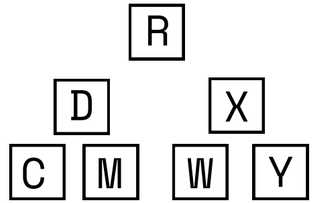


Ejercicio 1 - Solución

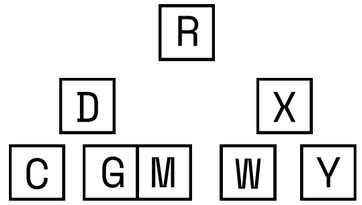
6. Insertar M: Nodo hoja tiene espacio, pasa a nodo 3, llaves ordenadas



7. Insertar C: Nodo [D|M] colapsa -> Split, llave central al nivel superior, nodo [R|X] colapsa, llave central al nivel superior, aumento de altura



8. Insertar G: Nodo hoja tiene espacio, pasa a nodo 3, llaves ordenadas



Ejercicio 2

a) Las 4 propiedades que definen un árbol rojo-negro permiten, al menos en teoría, que el árbol tenga únicamente nodos negros. Si efectivamente tuviéramos un árbol rojo-negro tal que todos sus nodos fueran negros, ¿qué condición particular cumpliría este árbol en cuanto a su “forma” y a su cantidad n de nodos, y por qué?

Pregunta 1 I2-2025-1

Ejercicio 1 a) - Solución

La propiedad 4, implica que todo camino desde la raíz hasta una hoja (nula) tenga la misma cantidad de nodos negros (no nulos).

Así, si el árbol tiene un solo nodo, éste debe ser negro (porque al ser raíz, la propiedad 2 exige que sea negro).

El árbol no puede tener sólo dos nodos, ambos negros, ya que la cantidad de nodos negros desde la raíz hasta su hijo no nulo sería distinta (mayor) que la cantidad de nodos negros desde la raíz hasta su hijo nulo. Pero sí podría tener sólo tres nodos, todos negros, en la forma de una raíz con dos hijos.

La única forma en que este último árbol, de tres nodos negros, pueda tener más nodos, todos negros, es que cada uno de los dos hijos tenga a su vez dos hijos negros.

Siguiendo con esta argumentación, la “forma” de un árbol rojo-negro que sólo tuviera nodos negros sería la de un árbol completamente lleno en todos sus niveles; si el árbol tiene k niveles, entonces tiene n=2^k-1 nodos

b) Más allá de la posibilidad de a), ¿qué ocurre en la práctica con un árbol rojo-negro, con n > 1 nodos, construido sólo mediante inserciones que se hacen siguiendo exactamente el procedimiento estudiado en clases? Argumenta de manera rigurosa que en este caso el árbol siempre va a tener al menos un nodo rojo.

Pregunta 1 I2-2025-1

Ejercicio 1 b) - Solución

Un nodo recién insertado se pinta siempre inicialmente de rojo; si el **padre es negro**, entonces el procedimiento de inserción termina ahí, y por lo tanto el árbol tiene al menos este nodo (recién insertado) rojo.

En cambio, si el **padre es rojo**, miramos el color del tío. Si el **tío es negro**, entonces hacemos una o dos rotaciones (dependiendo de si el nodo fue insertado “por afuera” o “por adentro”), y finalmente cambiamos los colores de un padre rojo y de su hijo negro, dejándolos negro y rojo, respectivamente. De nuevo, hay al menos un nodo rojo.

Si el **tío es rojo**, entonces cambiamos los colores del padre y tío (ambos inicialmente rojos) y del abuelo (inicialmente negro), pero mantenemos rojo el nodo recién insertado. Si bien en este caso los cambios de colores pueden replicarse hacia arriba, el nodo insertado se mantiene rojo.

Feedback