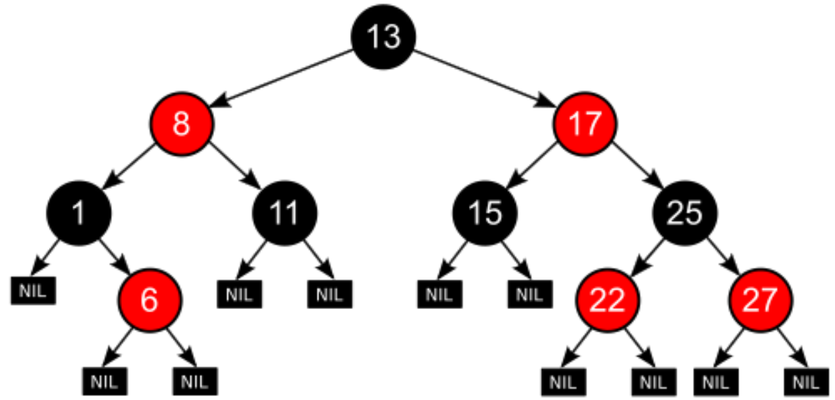
EDD 2025-2

ÁRBOLES ROJO-NEGRO

Elías - Steven - Joaquín - Alexander - Paula

ÁRBOLES ROJO-NEGRO



1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, entonces sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros en el camino a cada hoja debe ser la misma (esta es la noción del balance)





\+ Los nodos nulos/hojas vacías se consideran negros

\+ Las inserciones son con nodos rojos

ÁRBOL ROJO-NEGRO: INSERCIÓN

1

Los nodos siempre se insertan como rojos

2

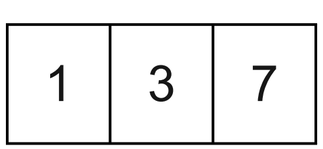
Si su padre es rojo ocurre una de dos cosas:

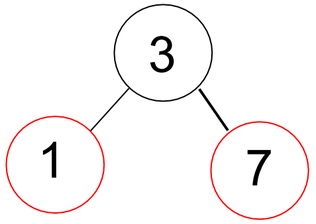
Si su tío es rojo, se da el caso en que 2-4 rebalsa. Esto se soluciona cambiando la coloración, lo que puede generar el mismo caso hacia arriba

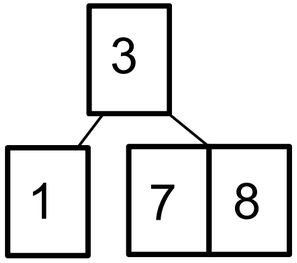
Si su tío es negro, se tiene un aumento de grado en el nodo 2-4. Esto se soluciona con rotaciones y cambios de color. (Los nodos nulos se consideran negros)

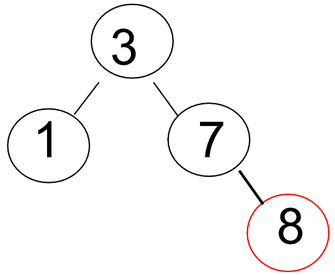
Si su tío es **rojo**, se da el caso en que 2-4 rebalsa. Esto se soluciona cambiando la coloración del padre, tío y abuelo, lo que puede generar el mismo caso hacia



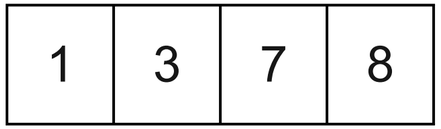


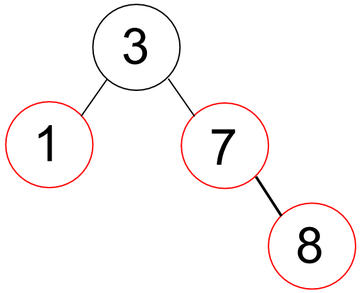








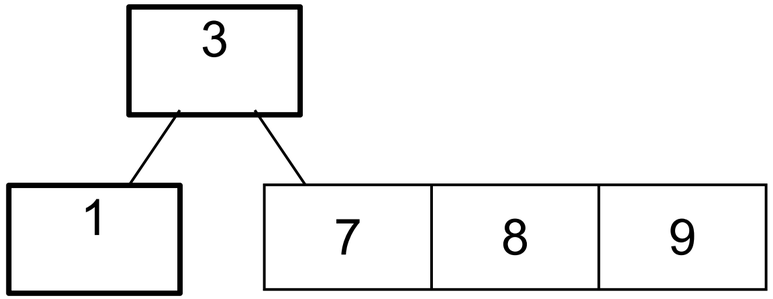


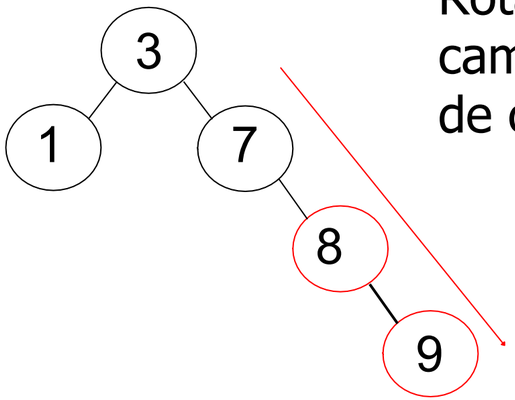


*3 sigue negro porque es la **raíz**

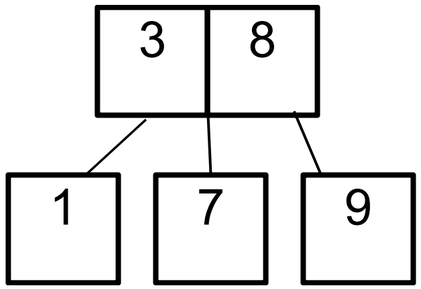


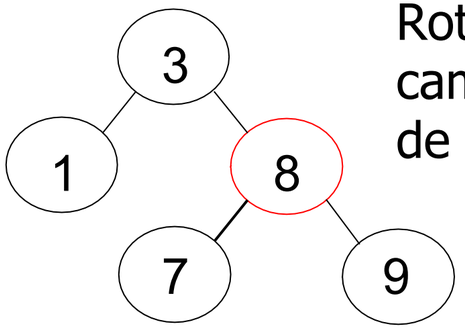
Si su tío es **negro**, se tiene un aumento de grado en el nodo 2-4. Esto se soluciona con rotaciones y cambios de color. (Los nodos nulos se consideran negros) para resolverlo se rota el abuelo y cambiar el color del nodo insertado.



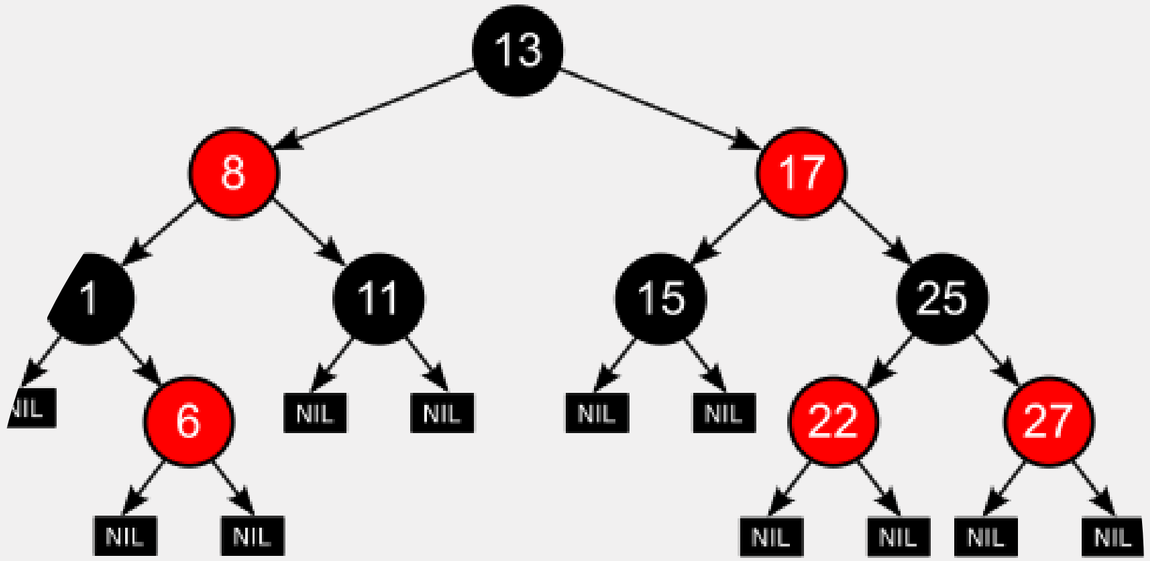


Rotar y cambio de color





Rotar y cambio de color


13
8
17
1
11
15
25
NIL
6
NIL
NIL
NIL
NIL
22
27
NIL
NIL
NIL
NIL
NIL
NIL

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1: 2025-1 I2



a) Las 4 propiedades que definen un árbol rojo-negro permiten, al menos en teoría, que el árbol tenga únicamente nodos negros. Si efectivamente tuviéramos un árbol rojo-negro tal que todos sus nodos fueran negros, ¿qué condición particular cumpliría este árbol en cuanto a su “forma” y a su cantidad n de nodos, y por qué?

EJERCICIO 1: 2025-1 I2



Resp.
La propiedad 4, implica que todo camino desde la raíz hasta una hoja (nula) tenga la misma cantidad de nodos negros (no nulos).

Así, si el árbol tiene un solo nodo, éste debe ser negro (porque al ser raíz, la propiedad 2 exige que sea negro).

El árbol no puede tener sólo dos nodos, ambos negros, ya que la cantidad de nodos negros desde la raíz hasta su hijo no nulo sería distinta (mayor) que la cantidad de nodos negros desde la raíz hasta su hijo nulo. Pero sí podría tener sólo tres nodos, todos negros, en la forma de una raíz con dos hijos.

La única forma en que este último árbol, de tres nodos negros, pueda tener más nodos, todos negros, es que cada uno de los dos hijos tenga a su vez dos hijos negros.

Siguiendo con esta argumentación, la “forma” de un árbol rojo-negro que sólo tuviera nodos negros sería la de un árbol completamente lleno en todos sus niveles; si el árbol tiene k niveles, entonces tiene **n=2^k−1 nodos**

EJERCICIO 1: 2025-1 I2



b) Más allá de la posibilidad de a), ¿qué ocurre en la práctica con un árbol rojo-negro, con n > 1 nodos, construido sólo mediante inserciones que se hacen siguiendo exactamente el procedimiento estudiado en clases? Argumenta de manera rigurosa que en este caso el árbol siempre va a tener al menos un nodo rojo.

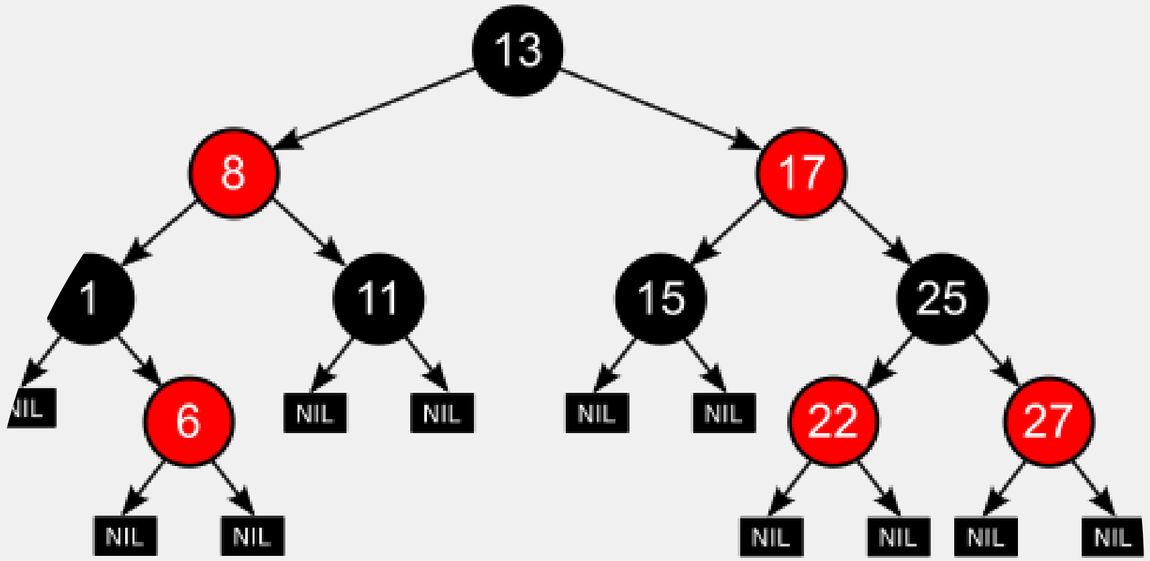
EJERCICIO 1: 2025-1 I2



Resp.
Un nodo recién insertado se pinta siempre inicialmente de rojo; si el padre es negro, entonces el procedimiento de inserción termina ahí, y por lo tanto el árbol tiene al menos este nodo (recién insertado) rojo.

En cambio, si el padre es rojo, miramos el color del tío. Si el tío es negro, entonces hacemos una o dos rotaciones (dependiendo de si el nodo fue insertado “por afuera” o “por adentro”), y finalmente cambiamos los colores de un padre rojo y de su hijo negro, dejándolos negro y rojo, respectivamente. De nuevo, hay al menos un nodo rojo.

Si el tío es rojo, entonces cambiamos los colores del padre y tío (ambos inicialmente rojos) y del abuelo (inicialmente negro), pero mantenemos rojo el nodo recién insertado. Si bien en este caso los cambios de colores pueden replicarse hacia arriba, el nodo insertado se mantiene rojo.


13
8
17
1
11
15
25
NIL
6
NIL
NIL
NIL
NIL
22
27
NIL
NIL
NIL
NIL
NIL
NIL

EJERCICIO 2

EJERCICIO 2: 2025-1 EX



Como vimos en clase, la inserción de un nodo en un árbol rojo-negro se puede dividir en tres casos. En todos los casos, el nodo recién insertado se pinta inicialmente de rojo:

1.El padre p de x es negro → estamos listos.

2. El padre p de x es rojo, pero el hermano q de p es negro (si p no tiene hermano, lo suponemos negro)→ Hacemos una o dos rotaciones y le cambiamos el color a dos nodos.

3. El padre p de x es rojo, y tío q de x también es rojo. → Como el abuelo r de x necesariamente es negro, cambiamos los colores de r y de sus hijos p y q; ahora r es rojo (y sus hijos p y q son negros). Por lo tanto, hay que revisar el color del padre s de r:

- Si s es negro → estamos listos.
- Si s es rojo → repetimos el caso 2) o el caso 3), según corresponda, pero ahora con s en lugar de p, y el hermano t de s en lugar de q.

EJERCICIO 2: 2025-1 EX



El caso 3) significa que potencialmente podemos llegar de vuelta hasta la raíz del árbol. Una manera de evitar tener que hacer este recorrido “de vuelta” es ir preparando el árbol a medida que vamos bajando (desde la raíz, cuando estamos buscando el punto en que hay que hacer la inserción), de modo de garantizar que q no será rojo — algoritmo de inserción top-down:

Al ir bajando, cuando encontramos un nodo U que tiene dos hijos rojos, cambiamos los colores de U (a rojo) y de sus hijos (a negro). Esto produciría un problema solo si el padre V de U también es rojo, en cuyo caso aplicamos el caso 2) anterior.

Muestra la ejecución de este algoritmo de inserción top-down al insertar la clave 22 en el siguiente árbol rojo-negro:

- La raíz tiene la clave 35.
- Sus hijos tienen las claves 30 (rojo) y 42 (negro).
- Los dos hijos negros de 30 tienen las claves 25 y 33.
- Los dos hijos rojos de 42 tienen las claves 40 y 45.
- Los dos hijos rojos de 25 tienen las claves 20 y 27.

EJERCICIO 2: 2025-1 EX DIBUJO EN PIZARRA!



- Al bajar desde la raíz, con clave 35, no encontramos ningún caso especial hasta que llegamos al nodo negro con clave 25, que tiene ambos hijos rojos: 20 y 27.

- Entonces aplicamos la nueva regla: cambiamos los colores de 25 a rojo y de sus dos hijos, 20 y 27, a negros.

- Como el padre de 25 también es rojo (el nodo con clave 30), aplicamos el caso 2: hacemos una rotación simple a la derecha de la arista 35–30 —con lo que queda 30 como raíz (roja), con hijos 25 y 35 negros— e intercambiamos colores entre padre e hijos, dejando a 30 negro, y a 25 y 35 ambos rojos.

- Ahora el nodo con clave 25 tiene ambos hijos —con claves 20 y 27— negros; y como 20 es una hoja, insertamos allí el nuevo nodo con clave 22, que pintamos de rojo.

¡MUCHAS GRACIAS!

