

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6 - Inducción

15 de abril de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

Resumen

- **Inducción Simple:**
  - Se utiliza para demostrar propiedades que dependen de los números naturales. Ej: $3n \geq 2n$ para todo n número natural.
  - Se demuestra que "si $p(n)$ es verdadero entonces $p(n+1)$ es verdadero".
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso, el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propiedad se cumple para el número natural n. Asumir que $p(n)$ es verdadero.
    3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $n+1$. $p(n) \implies p(n+1)$.
- **Inducción Fuerte:**
  - También se utiliza para los números naturales.
  - Se demuestra que "si $p(i)$ es verdadero para todos los $i \leq k$ entonces $p(k+1)$".
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propiedad se cumple para todo número natural menor o igual a k. Asumir que $p(i)$ es verdadero para todo $i \leq k$.

3. **TI:** Se demuestra que se cumple para $k+1$. $(p(i)\ \forall i \leq k) \implies p(k+1)$.

- Cualquier problema de inducción simple se puede resolver con inducción fuerte.

- **Principio de Buen Orden:**
  - Se utiliza sobre subconjuntos no vacíos de los números naturales o de los enteros positivos.
  - Afirma que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.
  - Sirve especialmente para demostraciones por contradicción.
  - La idea típica es:
    1. Suponer que existe al menos un contraejemplo.
    2. Formar el conjunto de todos los contraejemplos.
    3. Aplicar el principio de buen orden para concluir que existe un contraejemplo mínimo.
    4. Usar ese contraejemplo mínimo para construir otro más pequeño, llegando a una contradicción.
  - Este principio es equivalente a la inducción en $\mathbb{N}$.

Preguntas

a) Demuestre que para todo natural $n \geq 1$ se cumple que

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n$$

b) Considere la secuencia de naturales $s_0, s_1, s_2, \ldots$ definida por la siguiente recurrencia:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 4, \quad s_k = 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \quad \text{para todo natural } k \geq 2$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $s_n = 5^n - 1$

c) **Usando el principio de buen orden** demuestre que la ecuación $8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$ no posee soluciones en números enteros salvo $(0, 0, 0, 0)$.