Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3- Modelación y lógica de Predicados

25 de marzo de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

---

1. Modelamiento

Un *cuadro mágico* es una matriz de $n \times n$ que solo contiene números entre 1 y n en que la suma de cada fila y columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz de 3×3 es un cuadrado mágico:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de $n \times n$ con algunas posiciones en 0, diremos que es *completable* si existe una manera de reemplazar los 0 por números entre 1 y n de manera que la matriz resultante sea un cuadrado mágico. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable, pues pueden llenarse las casillas y obtener la matriz anterior:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de 3×3, construya una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que C es completable si y solo si φ es satisfacible.

Solución:
Para $1 \leq i, j, k \leq 3$, definimos las siguientes variables proposicionales:

$$p_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si en la fila } i, \text{columna } j, \text{está el valor } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos además dos conjuntos auxiliares:

- $M = \{(i, j, k) \mid \text{En la matriz } C \text{ aparece el número } k \text{ en la fila } i, \text{columna } j\}$
- $S_l = \{(l_1, l_2, l_3) \in \{1, 2, 3\}^3 \mid l_1 + l_2 + l_3 = l\}$

A partir de ellos podemos definir las siguientes proposiciones:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{(i,j,k)\in M} p_{ijk}$$

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=1}^{3} (p_{ij1} \vee p_{ij2} \vee p_{ij3})$$

$$\varphi_3 = \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=1}^{3} ((p_{ij1} \to \neg p_{ij2} \wedge \neg p_{ij3}) \wedge (p_{ij2} \to \neg p_{ij1} \wedge \neg p_{ij3}) \wedge (p_{ij3} \to \neg p_{ij1} \wedge \neg p_{ij2}))$$

Las siguientes fórmulas aseguran que la matriz sea un cuadrado mágico. Se fuerza que cada fila y columna tenga la misma suma que la primera fila:

$$\varphi_4 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\bigvee_{(k_1,k_2,k_3)\in S_l} (p_{11k_1} \wedge p_{12k_2} \wedge p_{13k_3}) \to \bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{21m_1} \wedge p_{22m_2} \wedge p_{23m_3}) \right)$$

$$\varphi_5 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\bigvee_{(k_1,k_2,k_3)\in S_l} (p_{11k_1} \wedge p_{12k_2} \wedge p_{13k_3}) \to \bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{31m_1} \wedge p_{32m_2} \wedge p_{33m_3}) \right)$$

$$\varphi_6 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\bigvee_{(k_1,k_2,k_3)\in S_l} (p_{11k_1} \wedge p_{12k_2} \wedge p_{13k_3}) \to \bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{11m_1} \wedge p_{21m_2} \wedge p_{31m_3}) \right)$$

$$\varphi_7 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\bigvee_{(k_1,k_2,k_3)\in S_l} (p_{11k_1} \wedge p_{12k_2} \wedge p_{13k_3}) \to \bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{12m_1} \wedge p_{22m_2} \wedge p_{32m_3}) \right)$$

$$\varphi_8 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\bigvee_{(k_1,k_2,k_3)\in S_l} (p_{11k_1} \wedge p_{12k_2} \wedge p_{13k_3}) \to \bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{13m_1} \wedge p_{23m_2} \wedge p_{33m_3}) \right)$$

Finalmente, se define:

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{8} \varphi_i$$

La cual será satisfacible si y solo si la matriz es completable.

2. Lógica de predicados

Sea $\mathcal{N}$ el dominio de los números naturales. Considere el predicado unario $P(n)$, que es verdadero si y solo si n es primo, y los predicados binarios $\leq$ y $=$. Formule la siguiente expresión en lógica de predicados:

> "Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo".

Solución

Considere los siguientes predicados:

- $Entre(x, y, z) := x \leq y \leq z \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(y = z)$ (y está entre x y z).
- $S(x, y) := x \leq y \wedge \neg(x = y) \wedge (\neg\exists z.Entre(x, z, y))$ (y es sucesor de x).
- $0(x) := \forall y.(x \leq y)$ (x es 0).
- $1(x) := \exists y.(0(y) \wedge S(y, x))$ (x es 1).
- $2(x) := \exists y.(1(y) \wedge S(y, x))$ (x es 2).
- $3(x) := \exists y.(2(y) \wedge S(y, x))$ (x es 3).
- $PrimoNo2No3(x) := P(x) \wedge \neg 2(x) \wedge \neg 3(x)$ (x es un número primo distinto de 2 y 3).

Usando estos predicados, la oración pedida es la siguiente:

$$\forall x \forall y.((PrimoNo2No3(x) \wedge PrimoNo2No3(y)) \rightarrow (\exists z.(Entre(x, z, y) \wedge \neg P(z))))$$

3. Lógica de Predicados

Sea $E(x, y)$ un predicado binario utilizado para representar una arista en un grafo. Escriba una oración en logica de predicados que represente cada una de las siguientes propiedades.

1. El grafo es un clique[1]
2. El grafo contiene un clique con 4 nodos
3. El grafo tiene un ciclo con 4 nodos
4. Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4
5. La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3
6. El grafo contiene exactamente 3 nodos

[1] Un clique es un subgrafo, donde cada nodo del subgrafo está conectado a todo el resto de nodos del subgrafo.

Solución

1. $\varphi = \forall x \forall y (\neg(x = y) \implies E(x, y))$

2. $Distintos(a, b, c, d) := \neg(a = b) \wedge \neg(a = c) \wedge \neg(a = d) \wedge \neg(b = c) \wedge \neg(b = d) \wedge \neg(c = d)$
   $Cliqueados(a, b, c, d) := E(a, b) \wedge E(a, c) \wedge E(a, d) \wedge E(b, c) \wedge E(b, d) \wedge E(c, d)$
   $\varphi = \exists x \exists y \exists z \exists w Distintos(x, y, z, w) \wedge Cliqueados(x, y, z, w)$

3. $Ciclo(a, b, c, d) := E(a, b) \wedge E(b, c) \wedge E(c, d) \wedge E(d, a)$
   $\varphi = \exists x \exists y \exists z \exists w Distintos(x, y, z, w) \wedge Ciclo(x, y, z, w)$

4. Para esta parte usaremos los predicados $Distintos(a, b, c, d, e)$ y $Distintos(a, b, c)$ que se definen de la misma manera que $Distintos(a, b, c, d)$ pero con 5 y 3 variables en vez que 4.
   $Camino_4(a, b) := \exists c \exists d \exists e \ Distintos(a, b, c, d, e) \wedge E(a, b) \wedge E(b, c) \wedge E(c, d) \wedge E(d, e)$
   $Camino_3(a, b) := \exists c \exists d \ Distintos(a, b, c, d) \wedge E(a, b) \wedge E(b, c) \wedge E(c, d)$
   $Camino_2(a, b) := \exists c \ Distintos(a, b, c) \wedge E(a, b) \wedge E(b, c)$
   $\varphi = \exists a \exists b \ Camino_4(a, b) \wedge \neg Camino_3(a, b) \wedge \neg Camino_2(a, b)$

5. $\varphi = \forall x \forall y (\neg(x = y) \implies (E(x, y) \vee Camino_2(x, y) \vee Camino_3(x, y)))$

6. $\varphi = \exists x \exists y \exists z \ Distintos(x, y, z) \wedge \neg \exists w \ Distintos(x, y, z, w)$