Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6 - Inducción

15 de abril de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

Ejercicio 1

a) Demuestre que para todo natural $n \geq 1$ se cumple que

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n$$

b) Considere la secuencia de naturales $s_0, s_1, s_2, \ldots$ definida por la siguiente recurrencia:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 4, \quad s_k = 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \quad \text{para todo natural } k \geq 2$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $s_n = 5^n - 1$

Solución:

a) Usamos inducción simple.

BI: Tomando $n = 1$:

$$2! = 2 \geq ((1+1)!)^1 = 2!$$

HI: Supongamos que para algún $n \geq 1$ se cumple:

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n$$

TI: Demostraremos que:

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! \cdot (2n+2)! \geq ((n+2)!)^{n+1}$$

Por hipótesis inductiva, al multiplicar ambos lados por $(2n+2)!$, obtenemos:

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! \cdot (2n+2)! \geq ((n+1)!)^n \cdot (2n+2)!$$

Ahora, observamos que

$$(2n+2)! = 1 \cdot 2 \cdots (n+1) \cdot (n+2) \cdots (2n+2).$$

En este producto, los últimos $n+1$ factores son

$$n+2,\ n+3,\ \ldots,\ 2n+2,$$

y cada uno de ellos es mayor o igual que $n+2$. Por lo tanto,

$$(n+2)(n+3)\cdots(2n+2) \geq (n+2)^{n+1}.$$

Así,

$$(2n+2)! \geq (n+1)! \cdot (n+2)^{n+1}.$$

Usando esta desigualdad, se sigue que

$$((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \geq ((n+1)!)^n \cdot (n+1)! \cdot (n+2)^{n+1}.$$

Luego,

$$((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \geq ((n+1)!)^{n+1}(n+2)^{n+1}.$$

Como

$$((n+1)!)^{n+1}(n+2)^{n+1} = \big((n+2)(n+1)!\big)^{n+1} = ((n+2)!)^{n+1},$$

concluimos que

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! \cdot (2n+2)! \geq ((n+2)!)^{n+1}.$$

Por lo tanto, la desigualdad se cumple para todo $n \geq 1$.

b) Usamos inducción fuerte.
BI: Verificamos para $n = 0$ y $n = 1$:

$$s_0 = 0 = 5^0 - 1, \quad s_1 = 4 = 5^1 - 1$$

HI: Supongamos que para $k \leq n$, se cumple $s_k = 5^k - 1$
TI: Demostraremos que $s_{n+1} = 5^{n+1} - 1$

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= 6s_n - 5s_{n-1} \\
&= 6(5^n - 1) - 5(5^{n-1} - 1) \\
&= 6 \cdot 5^n - 6 - 5 \cdot 5^{n-1} + 5 \\
&= 6 \cdot 5^n - 5 \cdot 5^{n-1} - 1 \\
&= (6 \cdot 5^n - 5 \cdot 5^{n-1}) - 1 \\
&= 5^{n-1}(6 \cdot 5 - 5) - 1 = 5^{n-1}(30 - 5) - 1 = 5^{n-1} \cdot 25 - 1 = 5^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Usando el principio de buen orden demustre Demuestre que la ecuación $8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$ no posee soluciones en números enteros salvo $(0, 0, 0, 0)$.

Solución: Vamos a demostrarlo por contradicción. Supongamos que existe solución en los enteros con $d > 0$. Eso quiere decir que podemos definir el siguiente conjunto:

$$Sol = \{d \in Z_{>0} | \exists a, b, c \text{ tal que } 8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4\}$$

Es importante notar que podemos definir $d > 0$ dado que al estar elevado a la 4 es equivalente a hacerlo en caso de existir solo valores negativos.
Luego, por principio de buen orden sabemos que existe d_0 el cual es el elemento mínimo del conjunto que cumple con:

$$8a_0^4 + 4b_0^4 + 2c_0^4 = d_0^4$$

Dado que el lado de la izquierda es par podemos asegurar que $d_0 = 2d_1$ con d_1 un natural distinto de cero. Eso quiere decir que podemos hacer el siguiente análisis:

$$\begin{aligned} &8a_0^4 + 4b_0^4 + 2c_0^4 = (2d_1)^4 \\ &8a_0^4 + 4b_0^4 + 2c_0^4 = 16d_1^4 \quad \text{Dividimos por 2} \\ &4a_0^4 + 2b_0^4 + c_0^4 = 8d_1^4 \end{aligned}$$

Haciendo el mismo análisis de antes notamos que el lado de la derecha es par por lo que el lado de la izquierda también es par lo que nos lleva a concluir que si tenemos par + par + c_0^4 necesariamente c_0 debe ser par por lo que $c_0 = 2c_1$ con c_1 un entero. Luego, quedamos con lo siguiente:

$$\begin{aligned} &4a_0^4 + 2b_0^4 + (2c_1)^4 = 8d_1^4 \\ &4a_0^4 + 2b_0^4 + 16c_1^4 = 8d_1^4 \quad \text{Dividimos por 2} \\ &2a_0^4 + b_0^4 + 8c_1^4 = 4d_1^4 \end{aligned}$$

Luego, hacemos exactamente el mismo análisis para $b_0 = 2b_1$.

$$\begin{aligned} &2a_0^4 + (2b_1)^4 + 8c_1^4 = 4d_1^4 \\ &2a_0^4 + 16b_1^4 + 8c_1^4 = 4d_1^4 \quad \text{Dividimos por 2} \\ &a_0^4 + 8b_1^4 + 4c_1^4 = 2d_1^4 \end{aligned}$$

Finalmente, realizamos el mismo análisis para $a_0 = 2a_1$.

$$\begin{aligned} &(2a_1)^4 + 8b_1^4 + 4c_1^4 = 2d_1^4 \\ &16a_1^4 + 8b_1^4 + 4c_1^4 = 2d_1^4 \quad \text{Dividimos por 2} \\ &8a_1^4 + 4b_1^4 + 2c_1^4 = d_1^4 \end{aligned}$$

Y acá notamos que hemos encontrado un nuevo d_1 tal que $d_1 < d_0$ y además $d_1 \in Sol$, pues satisface

$$8a_1^4 + 4b_1^4 + 2c_1^4 = d_1^4.$$

Esto contradice el hecho de que d_0 era el elemento mínimo de Sol, garantizado por el principio de buen orden.
Por lo tanto, nuestra suposición inicial de que existía una solución entera no trivial con $d > 0$ es falsa. En consecuencia, la ecuación

$$8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$$

no posee soluciones en números enteros salvo la solución trivial

$$(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0).$$