

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2 - Lógica proposicional

18 de marzo de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Equivalencia lógica $\equiv$**

  Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

1. Doble negación:
   $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
2. De Morgan:
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
3. Conmutatividad:
   $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
   $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
4. Asociatividad:
   $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
   $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
5. Distributividad:
   $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
6. Idempotencia:
   $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
   $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
7. Absorción:
   $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
   $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
8. Implicancia:
   $\alpha \to \beta \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
9. Doble implicancia:
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv$
   $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

- **Consecuencia lógica**

  Sea ϕ una fórmula en lógica proposicional y Σ un conjunto de fómulas proposicionales. Decimos que ϕ es consecuencia lógica de Σ si y solo si para toda asignacón σ de valores de verdad a las variables, si $\sigma(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Sigma$, entonces $\sigma(\phi) = 1$ y lo denotamos como: $\Sigma \models \alpha$

- **Conjuntos funcionalmente completos**

  Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en $\mathcal{L}(P)$ es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

  Ejemplos:

  - $\{\neg, \wedge, \vee\}$
  - $\{\neg, \wedge\}$
  - $\{\neg, \vee\}$
  - $\{\neg, \to\}$

1. Conjuntos funcionalmente completos

(a) Definimos el conectivo binario XOR según la siguiente tabla de verdad:

p	q	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Demuestre que el conjunto $\{\text{XOR}, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

(Hint: Recuerde que el conjunto $\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.)

b) Demuestre que el conjunto $\{\text{XOR}\}$ **no** es funcionalmente completo.

(Hint: Demuestre que la fórmula $\neg p$ no se puede expresar utilizando sólo XOR.)

2. Verdadero o Falso

Sean Σ_1 y Σ_2 conjuntos de fórmulas y α, β fórmulas en lógica proposicional. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera demuestre, y en caso de ser falsa dé un contraejemplo.

a) Si $\Sigma_1 \cup \{\beta\} \models \alpha$ entonces $\Sigma_1 \models \alpha$.

b) Si $\Sigma_1 \models \alpha$ y $\Sigma_2 \models \beta$ entonces $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \models \alpha \wedge \beta$.

c) Si $\Sigma_1 \not\models \alpha$ entonces $\Sigma_1 \models \neg\alpha$.