Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2 - Lógica proposicional

17 de marzo de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

---

1. Conjuntos funcionalmente completos

(a) Definimos el conectivo binario XOR según la siguiente tabla de verdad:

p	q	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Demuestre que el conjunto $\{\text{XOR}, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

(Hint: Recuerde que el conjunto $\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.)

b) Demuestre que el conjunto {XOR} **no** es funcionalmente completo.

(Hint: Demuestre que la fórmula $\neg p$ no se puede expresar utilizando sólo XOR.)

Solución:
(a) Siguiendo el hint, basta escribir $\neg$ en términos de XOR y $\rightarrow$. Notar que $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \alpha$ donde α es alguna fórmula que siempre se haga falsa. Una posible formula que siempre se hace falsa es φ XOR φ. Obtenemos que:

$$\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow (\varphi \ \mathsf{XOR} \ \varphi)$$

Verifiquemos lo de arriba. Tomemos una valuación arbitraria. Si $\neg\varphi$ es verdadero, entonces φ es falso, y lo de la derecha también es verdadero (ya que el antecedente del implica es falso). Si $\neg\varphi$ es falso, entonces φ es verdadero, y lo de la derecha también es falso (ya que el antecedente del implica es verdadero y la consecuencia es falsa). Otra

forma de verificar la equivalencia es hacer una "tabla de verdad" con todos los posibles valores de verdad que podría tener φ.

(b) Siguiendo el hint, hay que demostrar que $\neg p$ no se puede escribir sólo usando XOR. Por contradicción, supongamos que existe una fórmula φ que sólo usa XOR tal que $\neg p \equiv \varphi$. Podemos tomar la valuación que hace falso a la variable p. Con esta valuación $\neg p$ es verdadero, pero φ es falso, ya que todas las subfórmulas de φ deben evaluar a falso. Recordar que φ sólo usa la variable p y XOR, y que $0 \text{ XOR } 0 = 0$. Esto contradice el hecho de que son equivalentes.

2. Verdadero o Falso

Sean Σ_1 y Σ_2 conjuntos de fórmulas y α, β fórmulas en lógica proposicional. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera demuestre, y en caso de ser falsa dé un contraejemplo.

a) Si $\Sigma_1 \cup \{\beta\} \models \alpha$ entonces $\Sigma_1 \models \alpha$.

b) Si $\Sigma_1 \models \alpha$ y $\Sigma_2 \models \beta$ entonces $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \models \alpha \wedge \beta$.

c) Si $\Sigma_1 \not\models \alpha$ entonces $\Sigma_1 \models \neg\alpha$.

d) Si $\{\alpha\} \models \beta, \{\neg\alpha\} \models \beta,$ entonces β es una tautología

Solución:

a) **Falso.**
Contraejemplo: Sea $\Sigma_1 = \emptyset$, y sean las fórmulas $\alpha = p$ y $\beta = p$. Entonces la premisa $\Sigma_1 \cup \{\beta\} \models \alpha$ se convierte en $\{p\} \models p$, lo cual es trivialmente verdadero. Sin embargo, la conclusión $\Sigma_1 \models \alpha$ se convierte en $\emptyset \models p$. Esto es falso, ya que p no es una tautología. Una valuación v tal que $v(p) = 0$ es un modelo de Σ_1 (el conjunto vacío) pero no es un modelo de p, por lo tanto $\emptyset \not\models p$.

b) **Verdadero.**
Demostración: Sea σ una valuación cualquiera tal que σ es un modelo de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Por definición, esto significa que σ es un modelo de Σ_1 y también es un modelo de Σ_2, es decir, $\sigma(\Sigma_1) = 1$ y $\sigma(\Sigma_2) = 1$.
De la hipótesis $\Sigma_1 \models \alpha$ y como $\sigma(\Sigma_1) = 1$, se concluye que $\sigma(\alpha) = 1$. Análogamente, de la hipótesis $\Sigma_2 \models \beta$ y como $\sigma(\Sigma_2) = 1$, se concluye que $\sigma(\beta) = 1$.
Dado que $\sigma(\alpha) = 1$ y $\sigma(\beta) = 1$, por la semántica del conector de conjunción ($\wedge$), tenemos que $\sigma(\alpha \wedge \beta) = 1$. Como σ fue una valuación arbitraria que satisface $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, hemos demostrado por definición de consecuencia semántica que $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \models \alpha \wedge \beta$.

c) **Falso.**
Contraejemplo: Sea $\Sigma_1 = \{p\}$ y $\alpha = q$. La premisa $\Sigma_1 \not\models \alpha$ es verdadera. Para demostrarlo, debemos encontrar una valuación v que sea modelo de Σ_1 pero no de α. La valuación v con $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$ satisface Σ_1 (porque $v(p) = 1$) pero no satisface α (porque $v(q) = 0$). Por lo tanto, $\{p\} \not\models q$.
Ahora, la conclusión $\Sigma_1 \models \neg\alpha$ es falsa. Para demostrarlo, debemos encontrar una valuación v' que sea modelo de Σ_1 pero no de $\neg\alpha$. La valuación v' con $v'(p) = 1$ y $v'(q) = 1$ satisface Σ_1 (porque $v'(p) = 1$), pero no satisface $\neg\alpha$ (porque $v'(\neg q) = 0$). Por lo tanto, $\{p\} \not\models \neg q$.
d) **Verdadero**
Tenemos por hipótesis que,

$$\sigma(\alpha) = 1 \implies \sigma(\beta) = 1$$

$$\sigma(\neg\alpha) = 1 \implies \sigma(\beta) = 1$$

Luego, se tiene que

$$\sigma(\alpha) = 1 \implies \sigma(\beta) = 1$$
$$\sigma(\alpha) = 0 \implies \sigma(\beta) = 1$$

Luego, se tiene que para toda valuación, σ, β es verdadero pues las hipótesis abarcan cualquier valuación posible al tener que tanto $\sigma(\alpha) = 1 \vee \sigma(\alpha) = 0$ implican $\sigma(\beta) = 1$.

3. Modelamiento

Un *cuadro mágico* es una matriz de $n \times n$ que solo contiene números entre 1 y n en que la suma de cada fila y columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz de 3×3 es un cuadrado mágico:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de $n \times n$ con algunas posiciones en 0, diremos que es *completable* si existe una manera de reemplazar los 0 por números entre 1 y n de manera que la matriz resultante sea un cuadrado mágico. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable, pues pueden llenarse las casillas y obtener la matriz anterior:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de 3×3, construya una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que C es completable si y solo si φ es satisfacible.

Solución: Se deja este ejercicio para la próxima ayudantía