Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 7 - Teoría de Conjuntos

22 de abril de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de objetos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean A y B conjuntos. Diremos que A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) si

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B)$$

- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto A, el conjunto de todos los subconjuntos de A corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B,\ A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x,\ x \notin X.\ X = \varnothing$.

Axioma de emparejamiento: sean A, B dos conjuntos entonces existe un conjutno C cuyos elementos son exactamente A y B.

Axioma de regularidad o fundación: cada conjunto $A \neq \varnothing$ tiene un elemento que no tiene elementos en común con A

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

- Existe un único conjunto vacío.

Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A o en B corresponde a la unión de A y B ($A \cup B$),

  $$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **unión generalizada** como

  $$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A y en B corresponde a la intersección de A y B ($A \cap B$),

  $$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **intersección generalizada** como

  $$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

- Diferencia: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A pero no en B corresponde a la diferencia de A y B ($A \backslash B$),

  $$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Propiedades

Dado dos conjuntos A y B se define la *intersección* $A \cap B$ y la *diferencia* $A \setminus B$ como:

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \wedge c \in B\},$$
$$A \setminus B = \{c \mid c \in A \wedge c \notin B\}.$$

¿Son ciertas las siguientes igualdades para todos los conjuntos A, B y C? Justifique su respuesta con una demostración.

(a) $(A \setminus C) \cap (C \setminus B) = \emptyset$

(b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

Axioma de Regularidad o fundación

1. Un conjunto y se llama un *elemento épsilon-mínimo* de un conjunto x si $y \in x$, pero no existe $z \in x$ tal que $z \in y$, o equivalentemente $x \cap y = \varnothing$. El *Axioma de Fundación* (también llamado *Axioma de Regularidad*) afirma que todo conjunto no vacío tiene un elemento épsilon-mínimo.

   Muestra que este axioma implica lo siguiente:

   a) No existe un conjunto x tal que $x \in x$.

   b) No existen conjuntos x e y tales que $x \in y$ y $y \in x$.

   c) No existen conjuntos x, y, z tales que $x \in y$, $y \in z$ y $z \in x$.

2. Para cualquier conjunto x, el *sucesor* de x se define como

$$x' = x \cup \{x\}.$$

   Muestra cómo usar el Axioma de Fundación para dar una prueba sencilla de que si $x' = y'$, entonces $x = y$.

Propuesto de inducción:

Se dispone de masas con $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ gramos (cada una es tres veces más pesada que la anterior). Demuestre que para cada $n \geq 0$ entero, con ellas se puede equilibrar cualquier objeto cuyo peso sea n gramos, siempre que se permita colocar las masas en ambos platillos de la balanza.