

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 5 - Repaso I1

8 de abril de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

---

1. Incompletitud funcional y DNF/CNF

a) Demuestre que el conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo. *(Hint: Demuestre que con este conjunto no se puede formar $p \wedge \neg p$)*

b) Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$.

2. Consecuencia lógica

Sea P un conjunto de variables proposicionales, $\Sigma \subseteq L(P)$ un conjunto de fórmulas en lógica proposicional, y $\varphi, \psi \in L(P)$ dos fórmulas en lógica proposicional. Demuestre que:

a) Si $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$, entonces $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

b) Si φ es una tautología, se cumple que si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ entonces $\Sigma \models \psi$.

c) Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante. Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

3. Interpretaciones de predicados

Sea R un símbolo de predicado con aridad 2. Considere las siguientes fórmulas en lógica de predicados:

$$\varphi_1 : \forall x\, R(x, x)$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y\, (R(x, y) \to R(y, x))$$
$$\varphi_3 : \forall x \forall y\, \big((R(x, y) \wedge R(y, x)) \to x = y\big)$$
$$\varphi_4 : \forall x \forall y \forall z\, \big((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)\big)$$

Para cada una de las siguientes fórmulas, encuentre interpretaciones I tal que $I(\text{dom}) := \mathbb{N}$ de forma que $I \models \varphi$ en cada caso, y explique brevemente su desarrollo.

a) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_4$.

b) $\varphi = \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \varphi_3$.

c) $\varphi = \varphi_1 \wedge \neg\varphi_3 \wedge \varphi_4$.