Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 4- Lógica de Predicados

1 de abril de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

---

1. Calentamiento

a) Considere el símbolo de predicado binario $=$ que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine si las siguientes fórmulas son satisfacibles y demuestre su respuesta.

1. $\varphi_1 := \forall x \forall y \neg(x = y)$
2. $\varphi_2 := \forall x \exists y \exists z [\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$
3. $\varphi_3(x) := \forall y (S(x, y, y) \wedge S(x, x, y))$

b) Dadas las siguientes fórmulas con negaciones en sus predicados escribir una equivalente donde la negación aparezca solo una vez afuera de la fórmula.

1. $\forall x \forall y \exists z \, (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(y, z))$
2. $\exists x \forall y \left[(\neg P(x, y) \vee \neg Q(y)) \wedge \neg R(x) \right]$

Solución-Parte a)

1. No es satisfactible. Recordemos que todos los predicados están restringidos al dominio no vacío de evaluación dado por la interpretación. Para una interpretación arbitraria, sea a en ese dominio. Se tiene que $a = a$, lo que da un contraejemplo para $x = a, y = a$. Como la interpretación es arbitraria, ninguna interpretación satisface φ_1.

2. Es satisfactible. Basta con tomar cualquier interpretación $\mathcal{I}$ cuyo dominio tenga al menos dos elementos, como por ejemplo. $D = \mathcal{I}(\text{ dom }) = \{0, 1\}$ (no nos importa la interpretación de S pues no se utiliza en esta fórmula). Sea a un elemento arbitrario del dominio (por ejemplo, 0 o 1 en D). Por generalización

universal, basta demostrar que $\exists y \exists z[\neg(a = y) \wedge (a = z \vee y = z)]$. Como el dominio tiene al menos dos elementos distintos, sea b algún otro elemento del dominio (por ejemplo, $1 - a$ en D). Luego, notemos que $\neg(a = b)$ por cómo lo escogimos, y además trivialmente $(b = b)$, por lo que también es cierto que $(a = b \vee b = b)$. Aplicando generalización existencial dos veces, obtenemos lo mencionado.

3. Es satisfactible. Consideremos una interpretación $\mathcal{I}$ dada por $\mathcal{I}$ donde $D = I($ dom $) = \{0\}$ y el predicado S^D satisfecho por $\{(0, 0, 0)\}$. Se tiene entonces que $\mathcal{I} \models \varphi_3(0)$, por lo que φ_3 es satisfactible.

Solución-Parte b)

1. $\forall x \forall y \exists z \, (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(y, z))$

   $\forall x \forall y \exists z \, \neg(P(x, y) \vee Q(y, z))$ (por morgan)

   $\neg \exists x \exists y \forall z \, (P(x, y) \vee Q(y, z))$ (por equivalencia de cuantificadores)

2. $\exists x \forall y \left[(\neg P(x, y) \vee \neg Q(y)) \wedge \neg R(x)\right]$

   $\exists x \forall y \left[\neg(P(x, y) \wedge Q(y)) \wedge \neg R(x)\right]$ (por morgan)

   $\exists x \forall y \, \neg\left[(P(x, y) \wedge Q(y)) \vee R(x)\right]$ (por morgan)

   $\exists x \neg \exists y \left[(P(x, y) \wedge Q(y)) \vee R(x)\right]$ (por equivalencia de cuantificadores)

   $\neg \forall x \exists y \left[(P(x, y) \wedge Q(y)) \vee R(x)\right]$ (por equivalencia de cuantificadores)

2. Dominios y Satisfacibilidad

Considere los dominios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ y el predicado $\leq$ que define el orden usual en ambos dominios. Escriba dos fórmulas α y β que cumplan las siguientes propiedades:

a) α es verdadera sobre $\mathbb{R}$ pero falsa sobre $\mathbb{N}$.

b) β es falsa sobre $\mathbb{R}$ pero verdadera sobre $\mathbb{N}$..

Solución

I) Definimos la siguiente fórmula:

$$\alpha := \forall x \forall y((x \leq y \land y \neq x) \rightarrow \exists z(x \leq z \land z \leq y \land z \neq x \land z \neq y))$$

que establece la existencia de un número diferente entre todo par de números distintos. Esta fórmula es satisfecha por la interpretación $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ dado que para todo par de números reales a, b podemos encontrar otro real $c = \frac{a+b}{2}$. Sin embargo, esta fórmula no es satisfecha por $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$. Por ejemplo, si tomamos $a = 0$ y $b = 1$ no podemos encontrar ningún número natural entre ellos.

II) Definimos la siguiente fórmula:

$$\beta := \exists x \forall y(x \leq y)$$

que establece la existencia de un elemento mínimo en el dominio de la interpretación. Esta fórmula es satisfecha por $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ dado que el cero es el menor número natural. Sin embargo, no es satisfecha por $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, dado que los reales no tienen un menor elemento.

3. Modelamiento en lógica de predicados

Para esta pregunta considere el vocabulario:

$$\mathcal{L}' = \{S, E, M, D, N, B\},$$

donde S, E, M, D son símbolos unarios, N es binario y B es ternario.

Considere la siguiente interpretación I:

- El dominio son los robots. Es decir, la variable x representaría un robot.
- El predicado $S(x)$: indica que x es de tipo solar.
- El predicado $E(x)$: indica que x es de tipo eléctrico.
- El predicado $M(x)$: indica que x es de tipo magnético.
- El predicado $D(x)$: indica que x es de tipo doméstico (estándar).
- El predicado $N(x, y)$: indica que los protocolos de x desactivan a y.
- El predicado $B(x, y, z)$: indica que z fue ensamblado por x e y.

Además, suponga que también cuenta con el predicado binario $=$ que indica si dos robots son el mismo robot.

Defina en lógica de predicados las siguientes afirmaciones:

1. Todos los robots son de alguna naturaleza (al menos una entre: solar, eléctrica, magnética o doméstica).
2. Algunos robots no poseen naturalezas.
3. Los robots solares desactivan a los eléctricos, los eléctricos a los magnéticos y los magnéticos a los solares y eléctricos.
4. Si dos robots son de la misma naturaleza, entonces sus ensamblados tienen la naturaleza que los desactiva.
5. Los robots que son hermanos (comparten ambos progenitores) comparten las mismas naturalezas a excepción de que uno sea magnético, en ese caso el otro es eléctrico.

Solución

En todas las fórmulas las variables cuantifican sobre robots.

1. Todos los robots tienen alguna naturaleza:

$$\forall x\,(S(x) \vee E(x) \vee M(x) \vee D(x)).$$

2. Algunos robots no poseen naturalezas:

$$\exists x\,(\neg S(x) \wedge \neg E(x) \wedge \neg M(x) \wedge \neg D(x)).$$

3. Reglas de desactivación:

$$\forall x \forall y \big[(S(x) \wedge E(y) \to N(x,y)) \wedge (E(x) \wedge M(y) \to N(x,y)) \wedge (M(x) \wedge S(y) \to N(x,y)) \wedge (M(x) \wedge E(y) \to N(x,y))\big].$$

4. Si dos robots comparten naturaleza, sus ensamblados tienen la naturaleza que los desactiva:

$$\forall x \forall y \forall z \left(B(x,y,z) \wedge S(x) \wedge S(y) \to M(z)\right)$$
$$\wedge\ \forall x \forall y \forall z \left(B(x,y,z) \wedge E(x) \wedge E(y) \to (S(z) \vee M(z))\right)$$
$$\wedge\ \forall x \forall y \forall z \left(B(x,y,z) \wedge M(x) \wedge M(y) \to E(z)\right).$$

5. Hermanos comparten naturalezas; excepción: si uno es magnético, el otro es eléctrico.
   Primero definimos "ser hermanos":

$$\mathrm{Herm}(u,v) := \exists a \exists b \left(B(a,b,u) \wedge B(a,b,v) \wedge u \neq v\right).$$

   Entonces:

$$\forall u \forall v \big(\mathrm{Herm}(u,v) \to (S(u) \leftrightarrow S(v)) \wedge (D(u) \leftrightarrow D(v)) \wedge (M(u) \to E(v)) \wedge (M(v) \to E(u))\big).$$