Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 7 - Teoría de Conjuntos

22 de abril de 2026

Elías Ayaach, Francisca Paredes e Ignacio Vergara

Propiedades

Dado dos conjuntos A y B se define la *intersección* $A \cap B$ y la *diferencia* $A \setminus B$ como:

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \wedge c \in B\},$$
$$A \setminus B = \{c \mid c \in A \wedge c \notin B\}.$$

¿Son ciertas las siguientes igualdades para todos los conjuntos A, B y C? Justifique su respuesta con una demostración.

(a) $(A \setminus C) \cap (C \setminus B) = \emptyset$

(b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

Solución:

a) La igualdad es cierta. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Por el axioma de extensionalidad, basta ver que $(A \setminus C) \cap (C \setminus B)$ no tiene elementos. Por contradicción, supongamos que $u \in (A \setminus C) \cap (C \setminus B)$, para cierto u. Por la definición de intersección, tenemos que $u \in (A \setminus C)$ y $u \in (C \setminus B)$. Por la definición de la diferencia, obtenemos que $u \in A$ y $u \notin C$, y $u \in C$ y $u \notin B$. En particular, deducimos que $u \in C$ y $u \notin C$, lo cual es una contradicción.

b) La igualdad es falsa. Para demostrar esto, podemos tomar $A = \{a\}$, $B = \emptyset$, $C = \{a\}$, donde a es cualquier conjunto (por ejemplo $a = \emptyset$). Por un lado, tenemos que:

$$(A \setminus B) \setminus C = (\{a\} \setminus \emptyset) \setminus \{a\} = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$$

Por otra parte, tenemos que:

$$A \setminus (B \setminus C) = \{a\} \setminus (\emptyset \setminus \{a\}) = \{a\} \setminus \emptyset = \{a\}$$

Luego $(A \setminus B) \setminus C$ y $A \setminus (B \setminus C)$ son distintos.

Axioma de Regularidad o fundación

1. Un conjunto y se llama un *elemento épsilon-mínimo* de un conjunto x si $y \in x$, pero no existe $z \in x$ tal que $z \in y$, o equivalentemente $x \cap y = \varnothing$. El *Axioma de Fundación* (también llamado *Axioma de Regularidad*) afirma que todo conjunto no vacío tiene un elemento épsilon-mínimo.

   Muestra que este axioma implica lo siguiente:

   a) No existe un conjunto x tal que $x \in x$.

   b) No existen conjuntos x e y tales que $x \in y$ y $y \in x$.

   c) No existen conjuntos x, y, z tales que $x \in y$, $y \in z$ y $z \in x$.

2. Para cualquier conjunto x, el *sucesor* de x se define como

$$x' = x \cup \{x\}.$$

   Muestra cómo usar el Axioma de Fundación para dar una prueba sencilla de que si $x' = y'$, entonces $x = y$.

Solución

1. Para las demostraciones de este ítem buscaremos llegar a contradicciones con el axioma de regularidad.
   a) Supongamos que existe un conjunto x tal que $x \in x$. Definimos $a = \{x\}$. Si intentamos tomar x como elemento épsilon-mínimo en a, tenemos que $x \cap a = x$, ya que $x \in x$ y además $x \in a$. Esto contradice el axioma de regularidad, pues ningún elemento es disjunto de a. Por lo tanto, no puede existir tal x.
   b) Supongamos que existen x, y tales que $x \in y$ y $y \in x$. Consideremos el conjunto $a = \{x, y\}$. Si tomamos un candidato a épsilon-mínimo, por ejemplo x, vemos que $x \cap a \neq \varnothing$ ya que $y \in x \cap a$. Análogamente, si tomamos y, entonces $x \in y \cap a$. En consecuencia, ningún elemento de a es épsilon-mínimo, contradiciendo el axioma de regularidad. Por lo tanto, no pueden existir x, y con $x \in y$ y $y \in x$.
   c) Supongamos que existen x, y, z tales que $x \in y$, $y \in z$ y $z \in x$. Consideremos el conjunto $a = \{x, y, z\}$. Si tomamos x, notamos que $z \in x \cap a$; si tomamos

y, entonces $x \in y \cap a$; y si tomamos z, se cumple que $y \in z \cap a$. Por tanto, ninguno de los elementos de a es épsilon-mínimo, contradiciendo el axioma de regularidad.

2. **Solución:** Supongamos que $x' = y'$. Entonces

$$x \cup \{x\} = y \cup \{y\}.$$

Por igualdad de conjuntos, si $x \in x'$ necesariamente debe cumplirse que $x \in y'$. En otras palabras,

$$x \in y \quad \vee \quad x = y.$$

De manera análoga, concluimos que

$$y \in x \quad \vee \quad y = x.$$

Por lo tanto, para que la igualdad $x' = y'$ se mantenga, necesariamente se cumple la proposición:

$$(x \in y \quad \vee \quad x = y) \ \wedge \ (y \in x \quad \vee \quad y = x).$$

De lo anterior surgen los siguientes cuatro casos:

- Si $x = y$ y además $y \in x$, se concluye que $x \in x$, lo cual contradice el Axioma de Fundación.
- Si $x \in y$ y $y = x$, resulta nuevamente que $x \in x$, lo cual contradice el Axioma de Fundación.
- Si $x \in y$ y $y \in x$, estamos en el caso prohibido del problema anterior, ya que dos conjuntos no pueden contenerse mutuamente.
- Si $x = y$ y $y = x$, este es el único caso que no contradice el Axioma de Fundación y satisface la proposición formulada.

Conclusión: El único escenario posible sin entrar en contradicción con el Axioma de Fundación es que $x = y$.