Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 11

Control Digital

22 de Noviembre 2024

Francico Aguilera - francisco.aguilera@uc.cl

Problema 1

Considere una planta en tiempo continuo

$$G_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

1. Diseñe un controlador continuo $C(s)$ para la planta $G_o(s)$ que logre un ancho de banda de lazo cerrado de aproximadamente 3 rad/s. Además, el lazo debe lograr error estacionario cero para referencias constantes.
2. Encuentre una aproximación en tiempo discreto $H(z)$ de $G_o(s)$ cuando la planta continua se ubica entre un ZOH y un sampler. Use un tiempo de muestreo de $\Delta = 0.1$ segundos.
3. Usando el modelo discreto $H(z)$, diseñe un controlador $C(z)$ que logre los mismos requisitos del punto 1.

Solución:

1. Para diseñar $C(s)$, basta forzar integración para lograr error estacionario cero para referencias constantes. Es decir, el controlador debe tener la forma

$$C(s) = \frac{P(s)}{s\bar{L}(s)} = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+\ell_0)}$$

ya que el grado de éste es $n - 1 + r = 2 - 1 + 1 = 2$. El polinomio de lazo cerrado está dado por

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= s(s+\ell_0)(s+1)(s+2) + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 \\ &= s^4 + (3+\ell_0)s^3 + (3\ell_0 + 2 + p_2)s^2 + (2\ell_0 + p_1)s + p_0 \end{aligned}$$

Es decir, debemos asignar 4 polos de lazo cerrado. ¿Cómo los asignamos? lo hacemos de tal forma que el lazo cerrado tenga ancho de banda aproximadamente 3 rad/s. Es decir, podemos usar

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 4s + 9)(s + 5)^2 = s^4 + 14s^3 + 74s^2 + 190s + 225$$

Igualando coeficientes obtenemos los parámetros del controlador

$$\begin{aligned} p_2 &= 39 \\ p_1 &= 168 \\ p_0 &= 225 \\ \ell_0 &= 11 \end{aligned} \implies C(s) = \frac{39s^2 + 168s + 225}{s(s + 11)}$$

Implementando el controlador continuo en Matlab, se logra seguir una entrada de escalón unitario, junto con tener un ancho de banda de $3rad/s$:

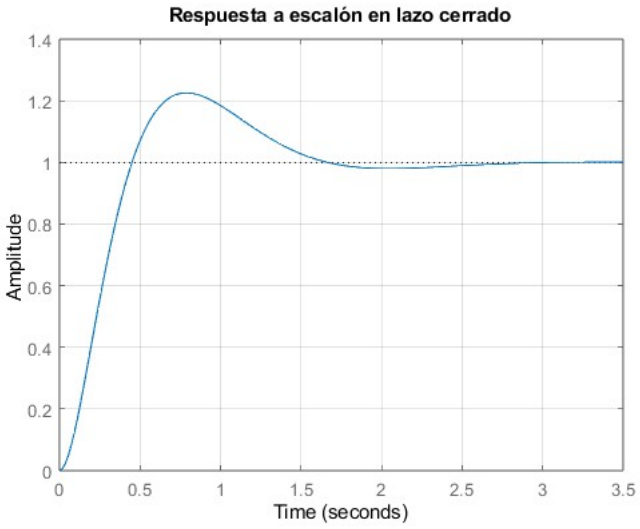


Figura 1: Respuesta a escalón unitario continuo

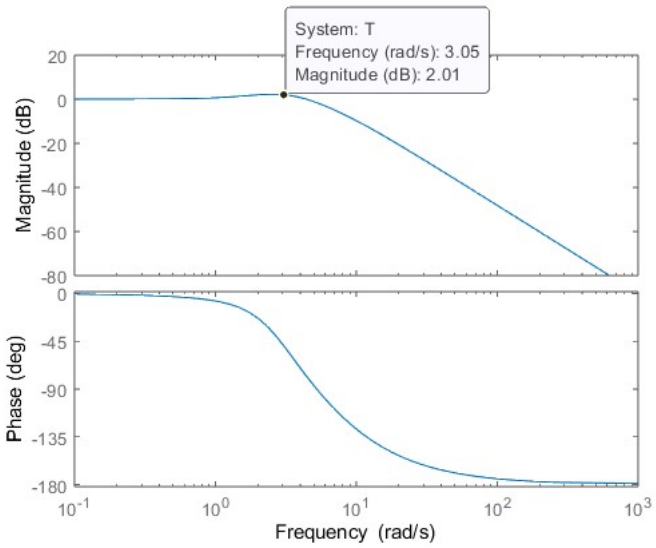
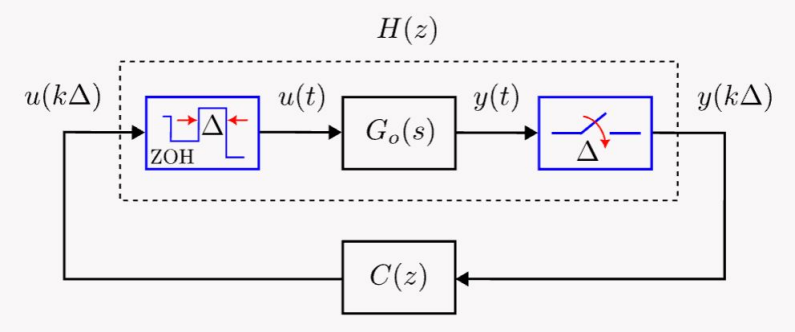


Figura 2: Bode controlador continuo

2. Para la discretización, debemos usar la arquitectura vista en clases



donde el modelo discreto $H(z)$ está dado por

$$\begin{aligned}
H(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\text{Respuesta a escalón de } G_o(s) \text{ muestreada}\right\} \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)s}\right\}\Big|_{t=k\Delta}\right\} \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}\right\}\Big|_{t=k\Delta}\right\} \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_{t=k\Delta}\right\} \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}-e^{-0.1k}+\frac{1}{2}e^{-0.2k}\right\} \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{(1/2)z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-0.1}}+\frac{(1/2)z}{z-e^{-0.2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{z-1}{z-0.90}+\frac{(1/2)(z-1)}{z-0.82} \\
&= \frac{0.01z-0.001}{(z-0.9)(z-0.82)}
\end{aligned}$$

3. La planta discreta $H(z)$ tiene orden 2, por ende el grado del controlador es $n-1+r=2-1+1=2$ (seguimos teniendo integración). Es decir, debe tener la forma

$$C(z)=\frac{P(z)}{(z-1)\bar{L}(z)}=\frac{p_2z^2+p_1z+p_0}{(z-1)(z+\ell_0)}$$

El requisito de que el ancho de banda sea igual a 3 rad/s lo podemos ver en el plano $\boxed{z}$ usando la relación $z = e^{s\Delta}$, donde en este caso $\Delta = 0.1$ y $s = -3$. Por ende, debemos ubicar los polos en $|z| \leq 0.74$. Es decir, $z = 0.74$ sería el polo dominante, y el resto debe ser menor a 3 para que convergan más rápido y no afecten a la dinámica del polo dominante. Recordar que en $\boxed{z}$, los polos dominantes están más cerca de 1 y los polos rápidos más cerca de 0. Un polinomio de lazo cerrado posible es

$$A_{cl}(z)=(z-0.74)(z-0.5)^3=z^4-2.24z^3+1.86z^2-0.68z+0.0925$$

Entonces, la ecuación de asignación de polos (diofantina) quedaría

$$(z-1)(z+\ell_0)(z-0.9)(z-0.82)+(0.01z-0.001)(p_2z^2+p_1z+p_0)=A_{cl}(z)$$

$$\begin{aligned}
&z^4+z^3\cdot(0.01p_2+\ell_0-2.72)+z^2\left(2.458-2.72l_0+0.01p_1-0.001p_2\right) \\
&+z\left(-0.738+2.458\ell_0+0.01p_0-0.001p_1\right)-0.738\ell_0-0.001p_0=A_{cl}(z)
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes y resolviendo (algo tedioso), podemos obtener

$$\begin{aligned} p_2 &= 65.9 \\ p_1 &= -101.9 \\ p_0 &= 39.61 \\ \ell_0 &= -0.18 \end{aligned} \implies C(z) = \frac{65.9z^2 - 101.9z + 39.61}{(z-1)(z-0.18)}$$

Implementando el controlador discreto en Matlab, se logra seguir una entrada de escalón unitario. Debido a las multiples aproximaciones hechas, el ancho de banda se reduce un poco a $2.4 rad/s$ aproximadamente.

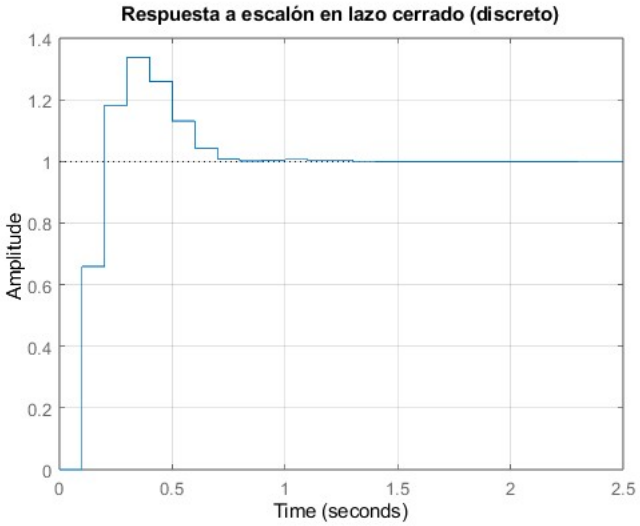


Figura 3: Respuesta a escalón unitario discreto

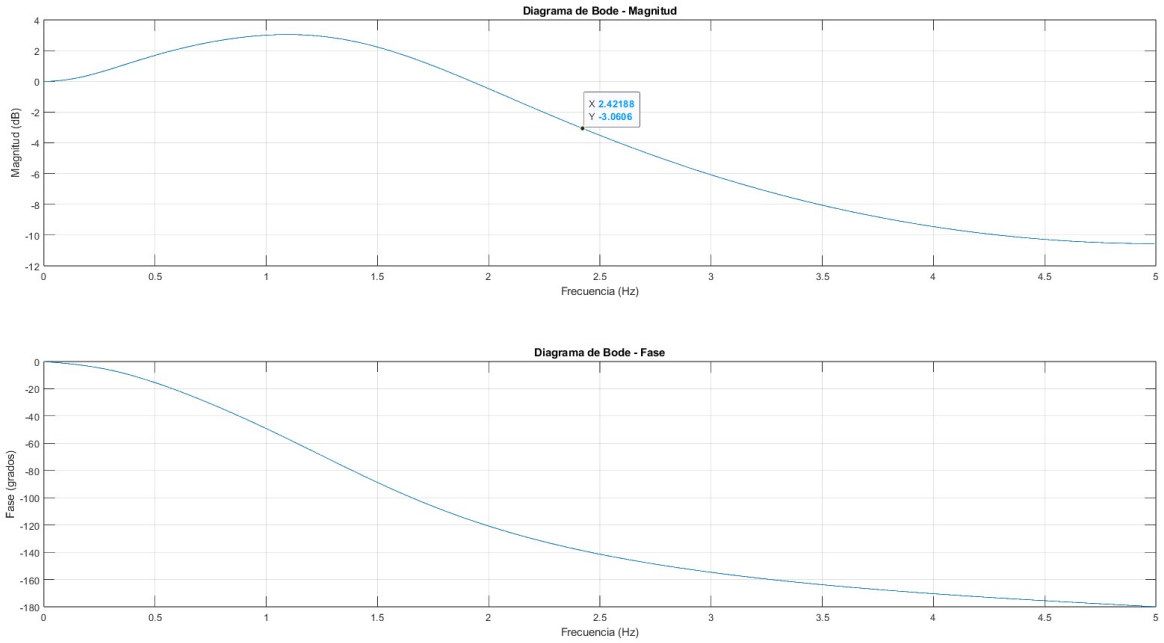


Figura 4: Bode controlador discreto