# Capítulo 6
# Control PID
# – Proporcional + Integral + Derivativo –

Miguel Torres Torriti

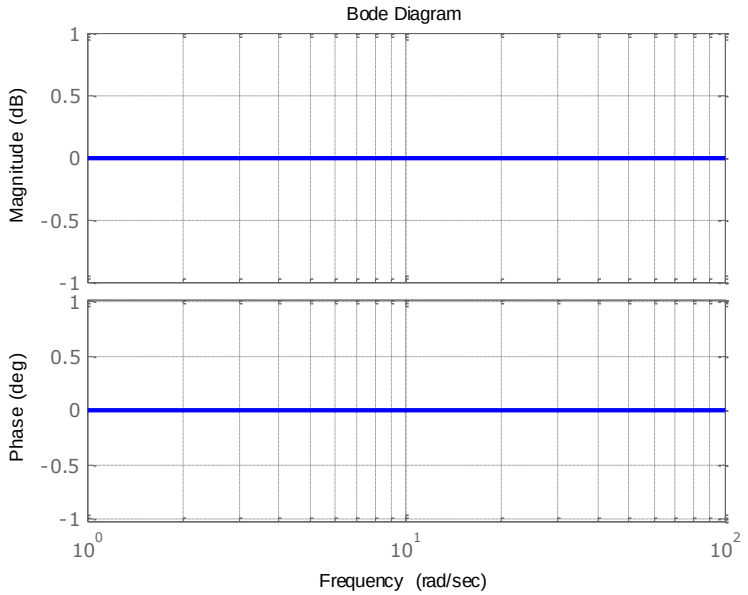
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

# Control PID

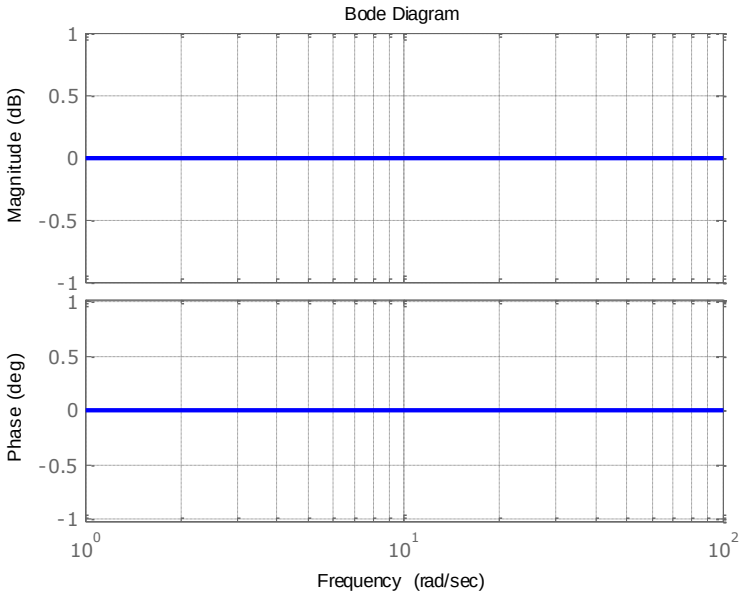
- Respuesta en Regimen Permanente
- Tiempo de Respuesta
- Respuesta en Frecuencia
- Margenes de Estabilidad
- ZOH
- Implementación Discreta:
  - Modo teórico.
  - Modo velocidad/incremental o en variables de estado.
- Implementación Práctica
- ZOH y filtros

# Respuesta en Frecuencia – Controladores P, I y D

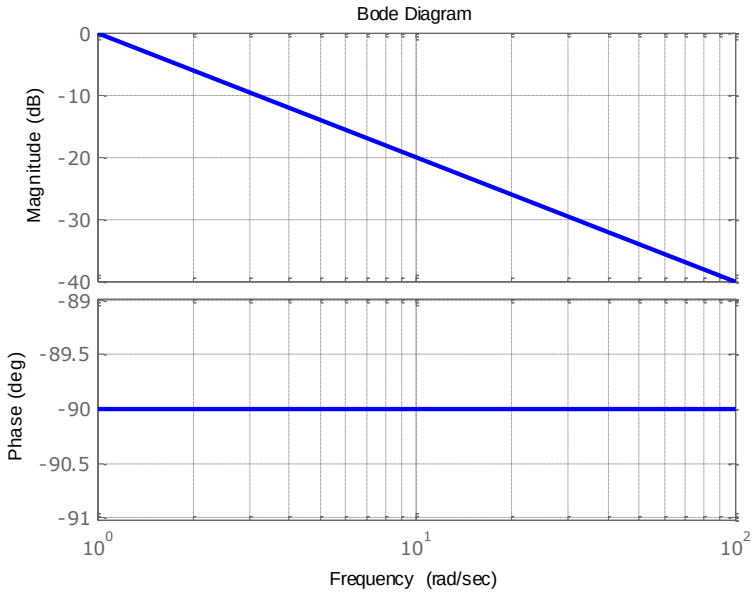



**P:** $K(s) = K_P = 1$

# Respuesta en Frecuencia – Controladores P, I y D

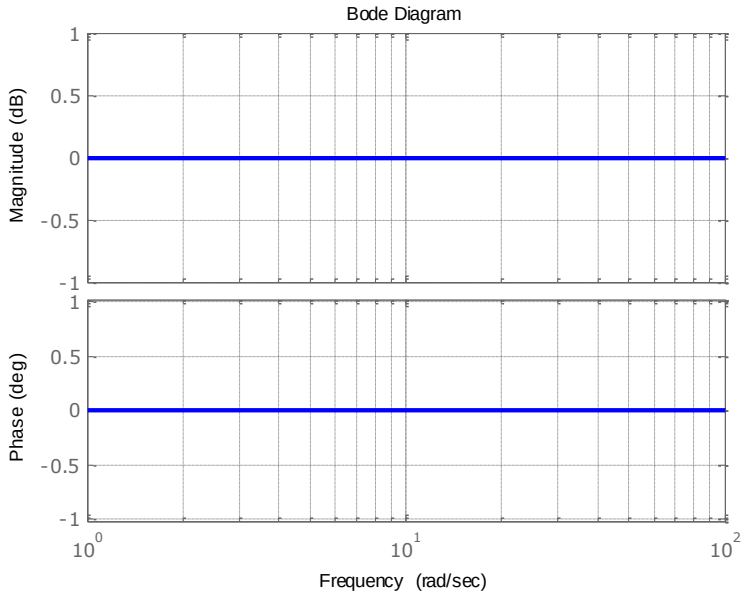



**P:** $K(s) = K_P = 1$

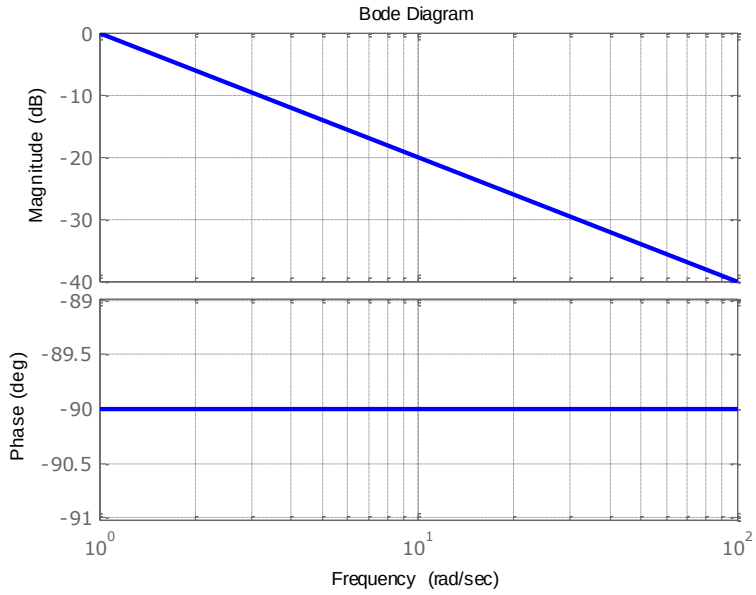



**I:** $K(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{s}$

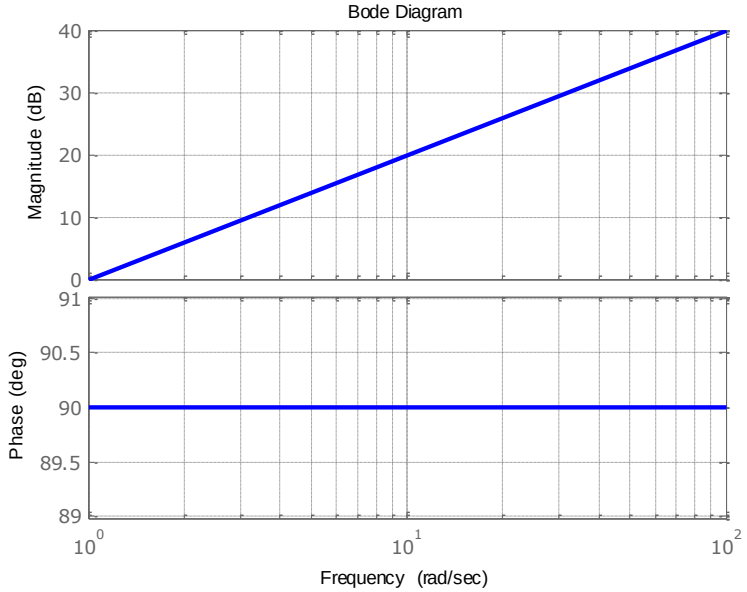
# Respuesta en Frecuencia – Controladores P, I y D




**P:** $K(s) = K_P = 1$

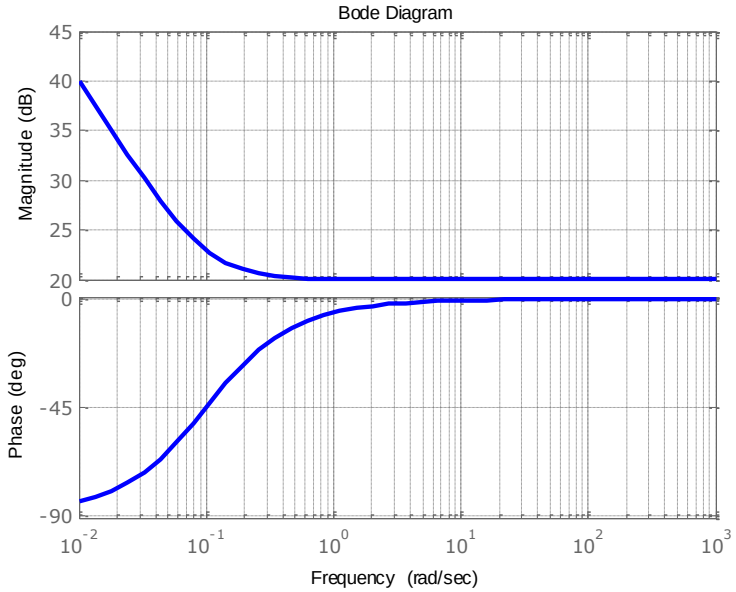



**I:** $K(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{s}$




**D:** $K(s) = K_D s = s$

# Respuesta en Frecuencia – Controladores PI, PD y PID



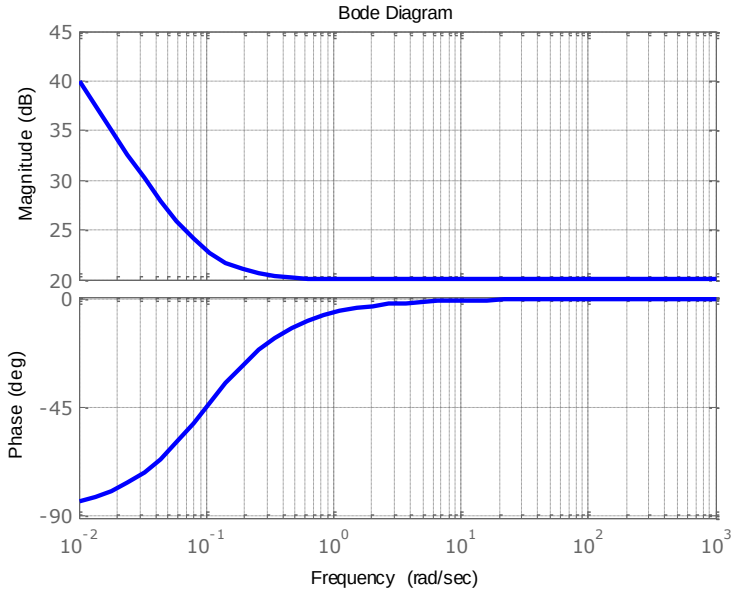

**PI:**

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

$$= 10 + \frac{1}{s}$$

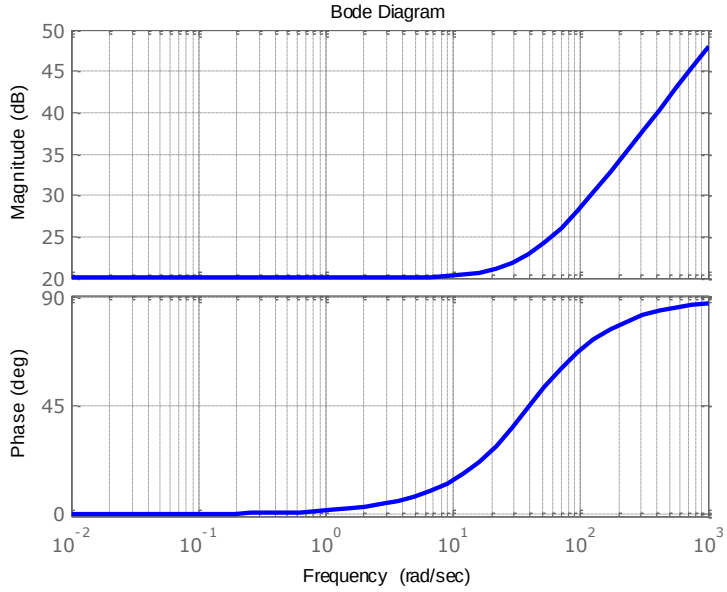
$$= \frac{10s + 1}{s}$$

# Respuesta en Frecuencia – Controladores PI, PD y PID




**PI:**

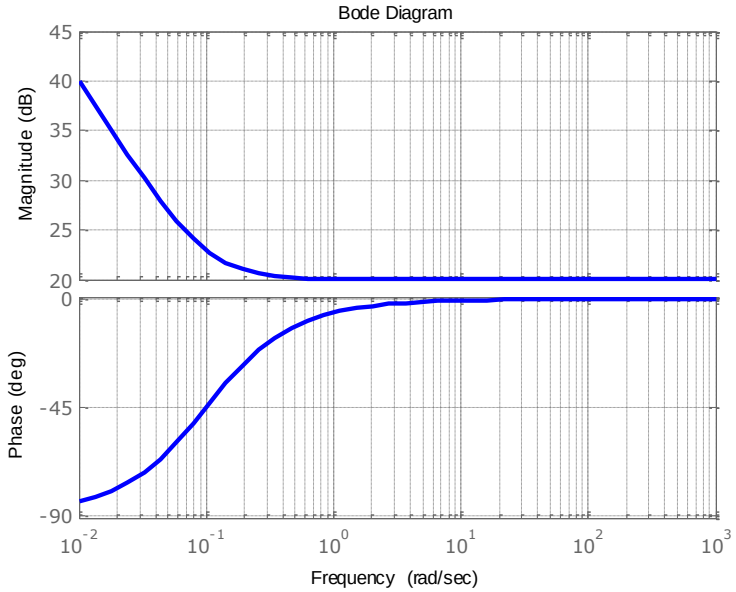
$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$
$$= 10 + \frac{1}{s}$$
$$= \frac{10s+1}{s}$$

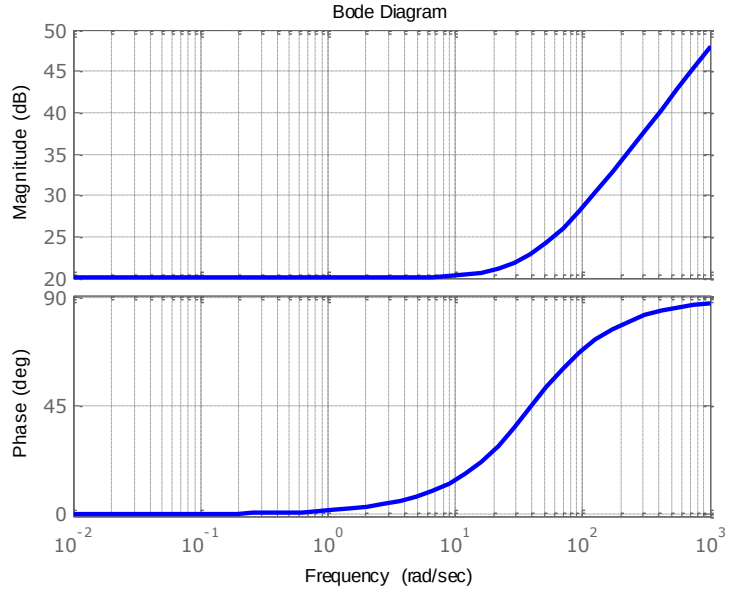



**PD:**

$$K(s) = K_P + K_D s$$
$$= 10 + \frac{1}{4}s$$
$$= 0.25s + 10$$

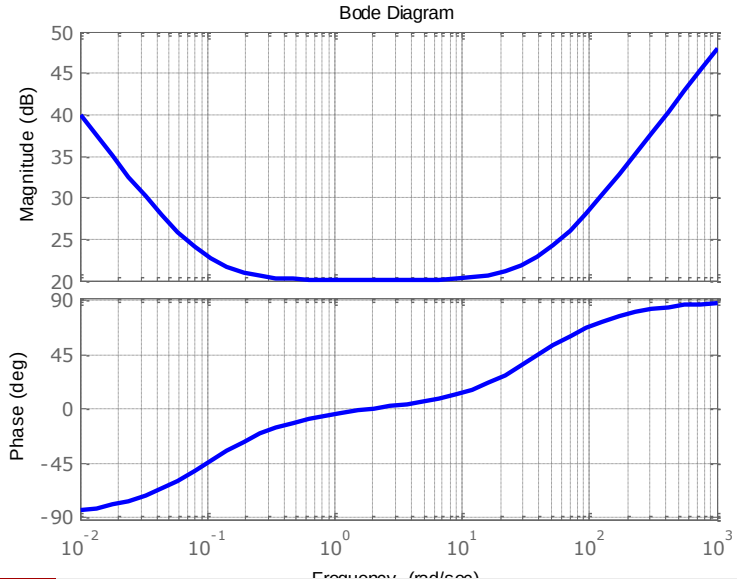
# Respuesta en Frecuencia – Controladores PI, PD y PID




**PI:**

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$
$$= 10 + \frac{1}{s}$$
$$= \frac{10s+1}{s}$$



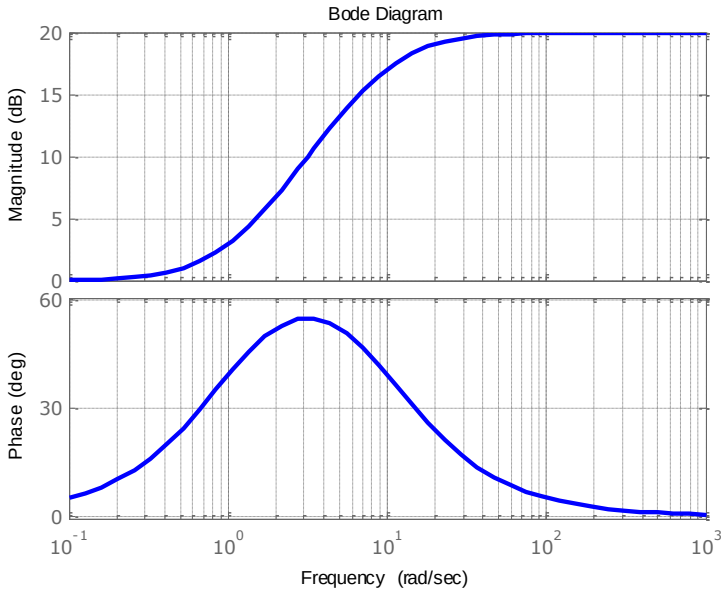

**PD:**

$$K(s) = K_P + K_D s$$
$$= 10 + \frac{1}{4}s$$
$$= 0.25s + 10$$

**PID:**

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$
$$= \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{s^2 + 40s + 4}{s}$$

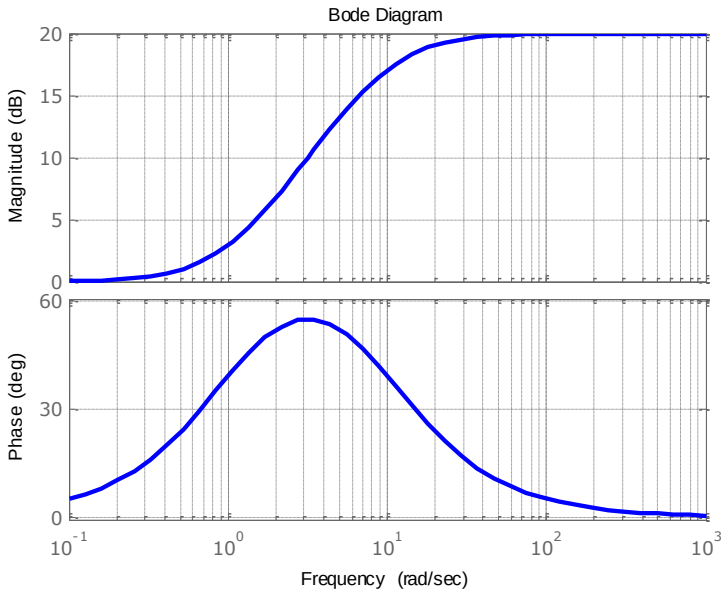
# Respuesta en Frecuencia – Compensadores




**Adelanto:**

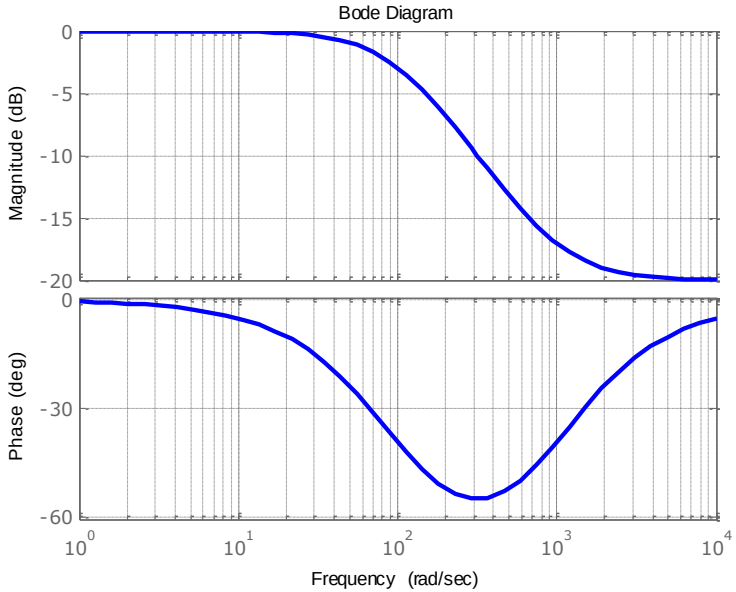
$$K(s) = \frac{T_a s + 1}{T_r s + 1}$$
$$= \frac{s + 1}{0.1s + 1}$$

# Respuesta en Frecuencia – Compensadores




**Adelanto:**

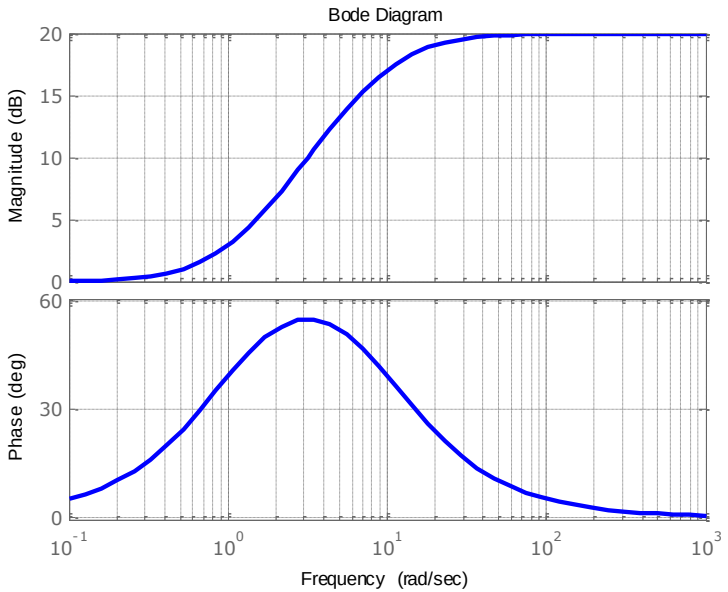
$$K(s) = \frac{T_a s + 1}{T_r s + 1} = \frac{s + 1}{0.1s + 1}$$

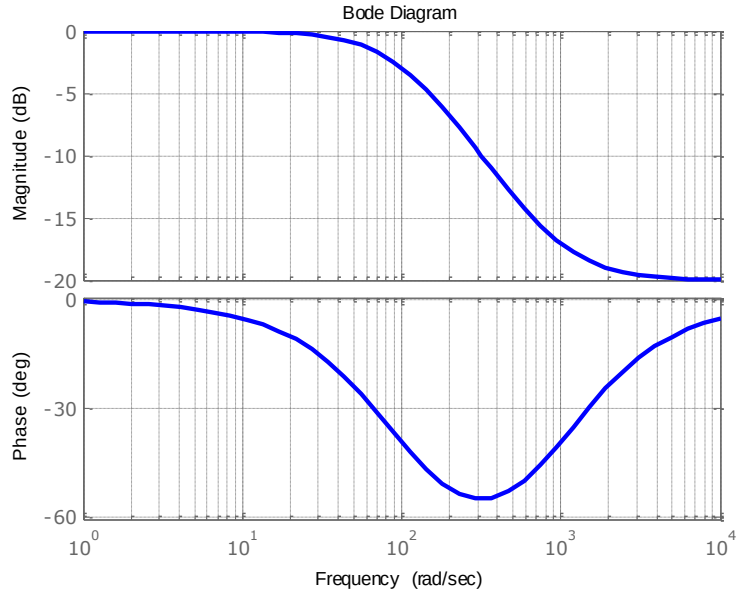



**Atraso:**

$$K(s) = \frac{T_a s + 1}{T_r s + 1} = \frac{0.001s + 1}{0.01s + 1}$$

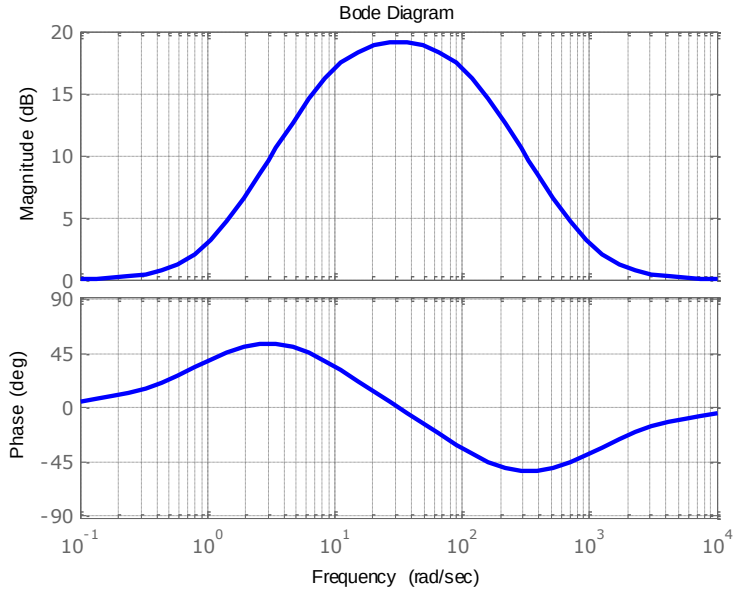
# Respuesta en Frecuencia – Compensadores




## Adelanto:

$$K(s) = \frac{T_a s + 1}{T_r s + 1} = \frac{s+1}{0.1s+1}$$




## Atraso:

$$K(s) = \frac{T_a s + 1}{T_r s + 1} = \frac{0.001s+1}{0.01s+1}$$

## Adelanto-Atraso:

$$K(s) = \frac{T_{a1} s + 1}{T_{r1} s + 1}\frac{T_{a2} s + 1}{T_{r2} s + 1} = \frac{s+1}{0.1s+1}\frac{0.001s+1}{0.01s+1}$$

- **PI/Atraso:** Son pasa-bajos, atrasan la fase.
- **PD/Adelanto:** Son pasa-altos, adelantan la fase.
- **Adelanto-Atraso:** Es un pasa-banda, adelanta las frecuencias bajas ("lentas"), atrasa las frecuencias altas ("rápidas").
- **Atraso-Adelanto:** Lo opuesto de Adelanto-Atraso... actúa como rechaza-banda.
- **PID:** Puede actuar como compensador de adelanto-atraso (o atraso-adelanto). Sin embargo, la acción **D** implica una respuesta de magnitud infinita para frecuencias infinitas, mientras que el compensador adelanto-atraso mantiene la respuesta de magnitud acotada... en la práctica la acción **D** se aplica en cascada con un pasabajo.

- **PI/Atraso:** Son pasa-bajos, atrasan la fase.
- **PD/Adelanto:** Son pasa-altos, adelantan la fase.
- **Adelanto-Atraso:** Es un pasa-banda, adelanta las frecuencias bajas ("lentas"), atrasa las frecuencias altas ("rápidas").
- **Atraso-Adelanto:** Lo opuesto de Adelanto-Atraso... actúa como rechaza-banda.
- **PID:** Puede actuar como compensador de adelanto-atraso (o atraso-adelanto). Sin embargo, la acción **D** implica una respuesta de magnitud infinita para frecuencias infinitas, mientras que el compensador adelanto-atraso mantiene la respuesta de magnitud acotada... en la práctica la acción **D** se aplica en cascada con un pasabajo.

# Observaciones



- **PI/Atraso:** Son pasa-bajos, atrasan la fase.
- **PD/Adelanto:** Son pasa-altos, adelantan la fase.
- **Adelanto-Atraso:** Es un pasa-banda, adelanta las frecuencias bajas ("lentas"), atrasa las frecuencias altas ("rápidas").
- **Atraso-Adelanto:** Lo opuesto de Adelanto-Atraso... actúa como rechaza-banda.
- **PID:** Puede actuar como compensador de adelanto-atraso (o atraso-adelanto). Sin embargo, la acción **D** implica una respuesta de magnitud infinita para frecuencias infinitas, mientras que el compensador adelanto-atraso mantiene la respuesta de magnitud acotada... en la práctica la acción **D** se aplica en cascada con un pasabajo.

# Observaciones



- **PI/Atraso:** Son pasa-bajos, atrasan la fase.
- **PD/Adelanto:** Son pasa-altos, adelantan la fase.
- **Adelanto-Atraso:** Es un pasa-banda, adelanta las frecuencias bajas ("lentas"), atrasa las frecuencias altas ("rápidas").
- **Atraso-Adelanto:** Lo opuesto de Adelanto-Atraso... actúa como rechaza-banda.
- **PID:** Puede actuar como compensador de adelanto-atraso (o atraso-adelanto). Sin embargo, la acción **D** implica una respuesta de magnitud infinita para frecuencias infinitas, mientras que el compensador adelanto-atraso mantiene la respuesta de magnitud acotada... en la práctica la acción **D** se aplica en cascada con un pasabajo.

# Observaciones



- **PI/Atraso:** Son pasa-bajos, atrasan la fase.
- **PD/Adelanto:** Son pasa-altos, adelantan la fase.
- **Adelanto-Atraso:** Es un pasa-banda, adelanta las frecuencias bajas ("lentas"), atrasa las frecuencias altas ("rápidas").
- **Atraso-Adelanto:** Lo opuesto de Adelanto-Atraso... actúa como rechaza-banda.
- **PID:** Puede actuar como compensador de adelanto-atraso (o atraso-adelanto). Sin embargo, la acción **D** implica una respuesta de magnitud infinita para frecuencias infinitas, mientras que el compensador adelanto-atraso mantiene la respuesta de magnitud acotada... en la práctica la acción **D** se aplica en cascada con un pasabajo.

- **I:** Elimina el error permanente ante la respuesta al escalón en plantas de 1er y 2do orden.
- **D:** Mejora los márgenes de estabilidad de la planta, sobre todo si la planta es de 3er orden con un polo real cercano al eje imaginario... puesto que el cero "ayuda" a "cancelar" uno al polo "desestabilizante".
- **I:** Observa el error acumulado... pero por observar errores "demasiado antiguos" puede atrasar la respuesta... quedarse en el pasado termina desestabilizando la planta.
- **D:** Observa la tasa de cambio (derivada) del error, y procura anticiparse (adelanto) al cambio... sin embargo, su acción implica que también tratará de anticiparse a la incertidumbre del ruido, lo cual solo provoca más inestabilidad.

- **I:** Elimina el error permanente ante la respuesta al escalón en plantas de 1er y 2do orden.
- **D:** Mejora los márgenes de estabilidad de la planta, sobre todo si la planta es de 3er orden con un polo real cercano al eje imaginario... puesto que el cero "ayuda" a "cancelar" uno al polo "desestabilizante".
- **I:** Observa el error acumulado... pero por observar errores "demasiado antiguos" puede atrasar la respuesta... quedarse en el pasado termina desestabilizando la planta.
- **D:** Observa la tasa de cambio (derivada) del error, y procura anticiparse (adelanto) al cambio... sin embargo, su acción implica que también tratará de anticiparse a la incertidumbre del ruido, lo cual solo provoca más inestabilidad.

- **I:** Elimina el error permanente ante la respuesta al escalón en plantas de 1er y 2do orden.
- **D:** Mejora los márgenes de estabilidad de la planta, sobre todo si la planta es de 3er orden con un polo real cercano al eje imaginario... puesto que el cero "ayuda" a "cancelar" uno al polo "desestabilizante".
- **I:** Observa el error acumulado... pero por observar errores "demasiado antiguos" puede atrasar la respuesta... quedarse en el pasado termina desestabilizando la planta.
- **D:** Observa la tasa de cambio (derivada) del error, y procura anticiparse (adelanto) al cambio... sin embargo, su acción implica que también tratará de anticiparse a la incertidumbre del ruido, lo cual solo provoca más inestabilidad.

- **I:** Elimina el error permanente ante la respuesta al escalón en plantas de 1er y 2do orden.
- **D:** Mejora los márgenes de estabilidad de la planta, sobre todo si la planta es de 3er orden con un polo real cercano al eje imaginario... puesto que el cero "ayuda" a "cancelar" uno al polo "desestabilizante".
- **I:** Observa el error acumulado... pero por observar errores "demasiado antiguos" puede atrasar la respuesta... quedarse en el pasado termina desestabilizando la planta.
- **D:** Observa la tasa de cambio (derivada) del error, y procura anticiparse (adelanto) al cambio... sin embargo, su acción implica que también tratará de anticiparse a la incertidumbre del ruido, lo cual solo provoca más inestabilidad.

# Observaciones 3/3

- **P:** Ayuda a acelerar la respuesta, ya que responde instantáneamente frente al error... sin embargo, por si solo no es capaz de mirar el error acumulado como **I**, y corregirlo, ni mirar la tendencia del error como **D** y anticiparse a su incremento. Por otro lado, mucha acción proporcional puede desestabilizar la planta.

## Recomendaciones

**P+I+D:** Deben usarse en medida justa... considerando, por ejemplo:

- Márgenes de ganancia y fase.
- LGR.
- Simulaciones de la respuesta dinámica del sistema.
- Indices de desempeño IAE, IQE, ITAE.
- Reglas empíricas de Ziegler & Nichols.

para poder determinar el impacto sobre la estabilidad del lazo cerrado y la respuesta general en el tiempo del sistema.

- **P:** Ayuda a acelerar la respuesta, ya que responde instantáneamente frente al error... sin embargo, por si solo no es capaz de mirar el error acumulado como **I**, y corregirlo, ni mirar la tendencia del error como **D** y anticiparse a su incremento. Por otro lado, mucha acción proporcional puede desestabilizar la planta.

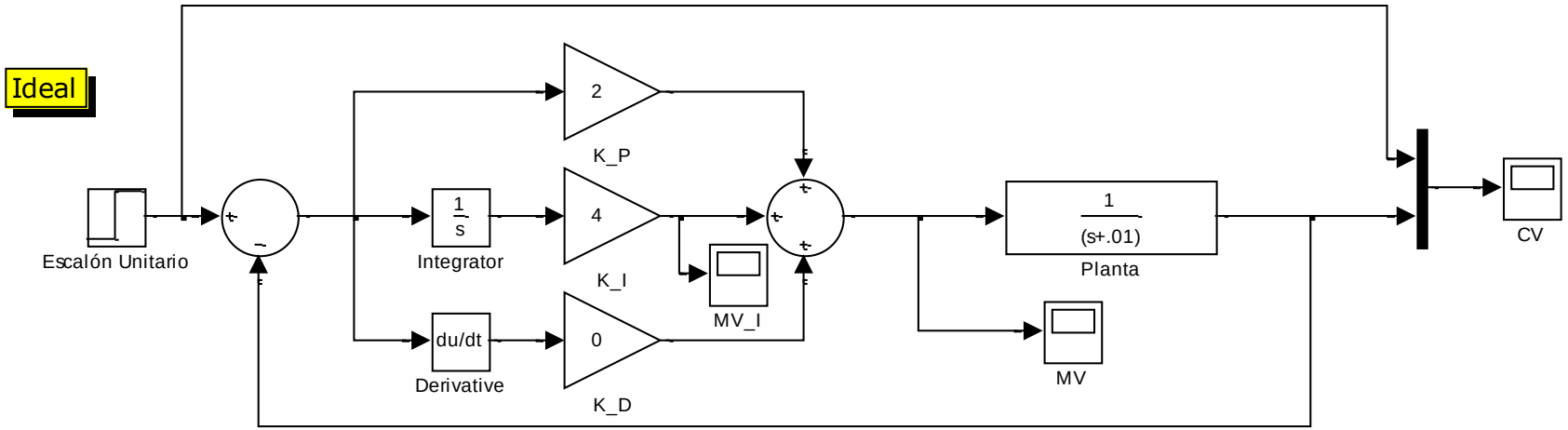
## Recomendaciones

**P+I+D:** Deben usarse en medida justa...considerando, por ejemplo:

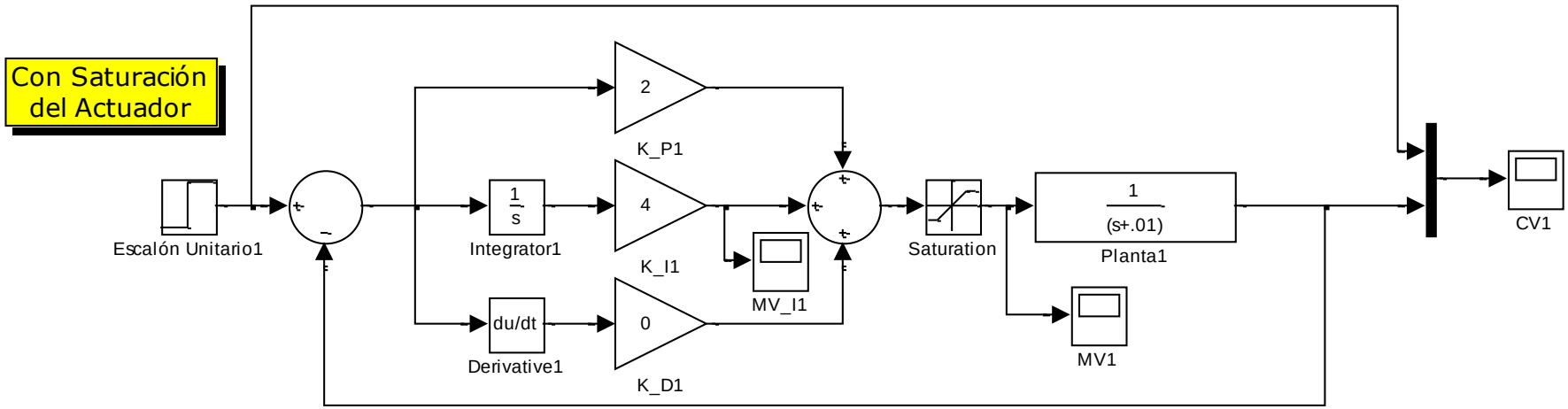
- Márgenes de ganancia y fase.
- LGR.
- Simulaciones de la respuesta dinámica del sistema.
- Indices de desempeño IAE, IQE, ITAE.
- Reglas empíricas de Ziegler & Nichols.

para poder determinar el impacto sobre la estabilidad del lazo cerrado y la respuesta general en el tiempo del sistema.

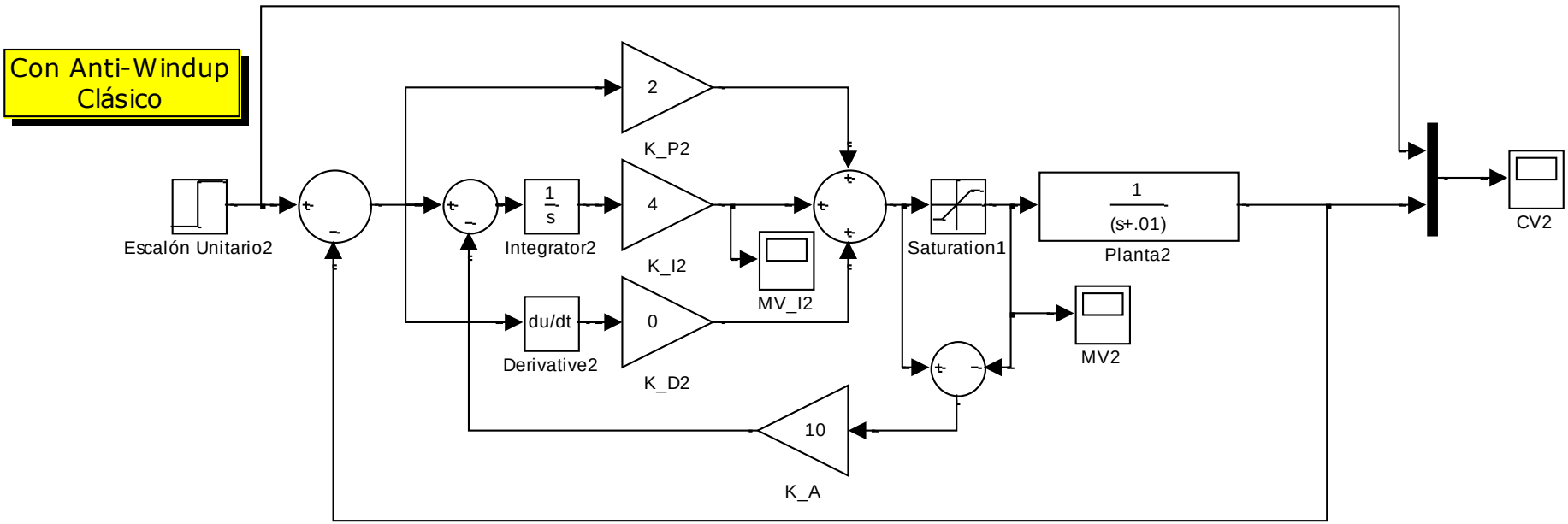
# Implementación Ideal del Control PID



# Implementación Ideal del Control PID con Saturación

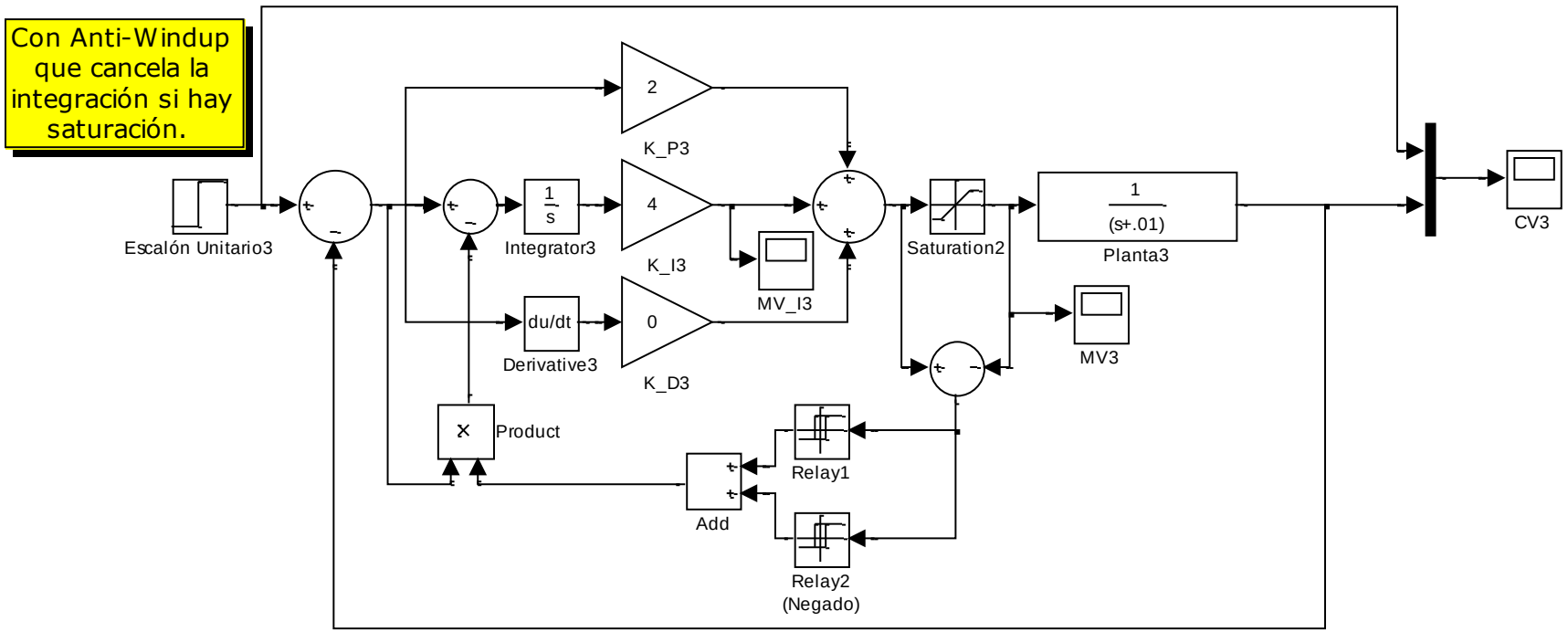


# Implementación Práctica del Control PID con Anti-Windup Clásico




Cuando el actuador entra en saturación, la acción anti-windup re-alimenta el exceso al integrador con signo negativo para reducir el error acumulado y devolver lo más rápido posible la MV a la banda no-saturada.

# Implementación Práctica del Control PID con Anti-Windup Alternativo




Esta implementación cancela la acción integral totalmente cuando el actuador entra en saturación. En un sistema digital puede implementarse empleando condiciones `if ... then ...`, en vez de funciones tipo relé.

# Pseudo-código de un programa de control PID

## — Inicialización —

```
Init:
  Definir Kp, Ki, Kd, Ts.
  e_prev    = 0;
  MV_I = 0;
  MV    = 0;
```

## — Control Loop —

```
Loop:
  SP    = UIread(io_dev);
  CV    = ADread(ch_in);
  e     = SP-CV;
  MV_P = Kp*e;
  MV_I = MV_I + Ki*Ts*e - Ka*sat(MV,MV_low,MV_high);
  MV_D = Kd*(e-e_prev)/Ts;
  MV    = MV_P + MV_I + MV_D;
  DAwrite(ch_out, MV);
  e_prev = e;
```

# Comentarios Finales sobre la Implementación de PIDs

A continuación veremos...

- Formas de implementación del control PID
  - Forma Posicional
  - Forma Velocidad (o Incremental)
  - Forma Variables de Estado
- Ventas/Desventajas de cada forma

# PID discreto a partir del PID de tiempo contínuo

Considere el controlador PID en el dominio del tiempo contínuo:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de}{dt} + u^* \\ u(t) &= K_P e(t) + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau)d\tau + \frac{K_P}{T_D} \frac{de}{dt} + u^* \end{aligned}$$

donde $u^*$ es el valor de referencia de la acción de control (el valor nominal correspondiente al punto de operación en equilibrio).

La implementación digital "rústica" o poco refinada se obtiene considerando que:

$$\frac{de}{dt}(kT_s) \approx \frac{e(kT_s) - e((k-1)T_s)}{T_s}$$

y que:

$$\int_0^{kT_s} e(\tau)d\tau \approx \sum_{n=0}^{k} e(nT_s)T_s$$

# PID discreto a partir del PID de tiempo contínuo

Considere el controlador PID en el dominio del tiempo contínuo:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de}{dt} + u^* \\ u(t) &= K_P e(t) + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau)d\tau + \frac{K_P}{T_D} \frac{de}{dt} + u^* \end{aligned}$$

donde $u^*$ es el valor de referencia de la acción de control (el valor nominal correspondiente al punto de operación en equilibrio).

La implementación digital "rústica" o poco refinada se obtiene considerando que:

$$\frac{de}{dt}(kT_s) \approx \frac{e(kT_s) - e((k-1)T_s)}{T_s}$$

y que:

$$\int_0^{kT_s} e(\tau)d\tau \approx \sum_{n=0}^{k} e(nT_s)T_s$$

# PID discreto a partir del PID de tiempo contínuo

Considere el controlador PID en el dominio del tiempo contínuo:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de}{dt} + u^* \\ u(t) &= K_P e(t) + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau)d\tau + \frac{K_P}{T_D} \frac{de}{dt} + u^* \end{aligned}$$

donde $u^*$ es el valor de referencia de la acción de control (el valor nominal correspondiente al punto de operación en equilibrio).

La implementación digital "rústica" o poco refinada se obtiene considerando que:

$$\frac{de}{dt}(kT_s) \approx \frac{e(kT_s) - e((k-1)T_s)}{T_s}$$

y que:

$$\int_0^{kT_s} e(\tau)d\tau \approx \sum_{n=0}^{k} e(nT_s)T_s$$

# PID discreto a partir del PID de tiempo contínuo

Luego, el PID discretizado será:

$$u(k) = K_P e(k) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - e(k-1)] + u^*$$

Esta forma particular del control PID discreto es el llamada **forma posicional**, o **control PID posicional**, porque la señal de control se calcula con respecto a un nivel de referencia $u^*$.

**Nota:** No confuda control PID posicional (positional PID controller) con control PID de posición (PID position control/controller).

# PID discreto a partir del PID de tiempo contínuo

Luego, el PID discretizado será:

$$u(k) = K_P e(k) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - e(k-1)] + u^*$$

Esta forma particular del control PID discreto es el llamada **forma posicional**, o **control PID posicional**, porque la señal de control se calcula con respecto a un nivel de referencia $u^*$.

**Nota:** No confuda control PID posicional (positional PID controller) con control PID de posición (PID position control/controller).

# PID discreto a partir del PID de tiempo contínuo

Luego, el PID discretizado será:

$$u(k) = K_P e(k) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - e(k-1)] + u^*$$

Esta forma particular del control PID discreto es el llamada **forma posicional**, o **control PID posicional**, porque la señal de control se calcula con respecto a un nivel de referencia $u^*$.

**Nota:** No confuda control PID posicional (positional PID controller) con control PID de posición (PID position control/controller).

Considere el controlador PID en el dominio de Laplace:

$$\begin{aligned} U(s) &= K_P E(s) + K_I \frac{1}{s} E(s) + K_D s E(s) \\ U(s) &= K_P E(s) + \frac{K_P}{T_I} \frac{1}{s} E(s) + K_P T_D s E(s) \end{aligned}$$

La versión discreta en el dominio $Z$ del control PID se puede obtener empleando:

- Aproximación rectangular hacia adelante
- Aproximación rectangular hacia atrás
- Aproximación de Tustin o bilineal
- Retención de Orden Cero (Zero-Order Hold)

Considere el controlador PID en el dominio de Laplace:

$$\begin{aligned} U(s) &= K_P E(s) + K_I \frac{1}{s} E(s) + K_D s E(s) \\ U(s) &= K_P E(s) + \frac{K_P}{T_I} \frac{1}{s} E(s) + K_P T_D s E(s) \end{aligned}$$

La versión discreta en el dominio $Z$ del control PID se puede obtener empleando:

- Aproximación rectangular hacia adelante
- Aproximación rectangular hacia atrás
- Aproximación de Tustin o bilineal
- Retención de Orden Cero (Zero-Order Hold)

Considere el controlador PID en el dominio de Laplace:

$$\begin{aligned} U(s) &= K_P E(s) + K_I \frac{1}{s} E(s) + K_D s E(s) \\ U(s) &= K_P E(s) + \frac{K_P}{T_I} \frac{1}{s} E(s) + K_P T_D s E(s) \end{aligned}$$

La versión discreta en el dominio $Z$ del control PID se puede obtener empleando:

- Aproximación rectangular hacia adelante
- Aproximación rectangular hacia atrás
- Aproximación de Tustin o bilineal
- Retención de Orden Cero (Zero-Order Hold)

Considere el controlador PID en el dominio de Laplace:

$$\begin{aligned} U(s) &= K_P E(s) + K_I \frac{1}{s} E(s) + K_D s E(s) \\ U(s) &= K_P E(s) + \frac{K_P}{T_I} \frac{1}{s} E(s) + K_P T_D s E(s) \end{aligned}$$

La versión discreta en el dominio $Z$ del control PID se puede obtener empleando:

- Aproximación rectangular hacia adelante
- Aproximación rectangular hacia atrás
- Aproximación de Tustin o bilineal
- Retención de Orden Cero (Zero-Order Hold)

La implementación digital más refinada se obtiene aplicando el método basado en ZOH. Sin embargo, suponga que se aplica la *aproximación rectangular hacia atrás*; en este caso se obtendría:

$$U(z) = K_P E(z) + K_I \frac{T_s}{1 - z^{-1}} E(z) + K_D \frac{1 - z^{-1}}{T_s} E(z)$$

Recordando que $z^{-1}$ aplicado a $F(z)$ corresponde a retardar $f(k)$ en un periodo, es decir $z^{-1}F(z) \leftrightarrow f(k-1)$, aplicando la transformada $Z$ inversa a la expresión anterior del PID discreto en el dominio $Z$ reordenada como:

$$(1 - z^{-1})U(z) = K_P(1 - z^{-1})E(z) + K_I T_s E(z) + K_D \frac{(1 - z^{-1})^2}{T_s} E(z)$$

se obtiene el siguiente PID de tiempo discreto:

$$u(k) = u(k-1) + K_P[e(k) - e(k-1)] + K_I T_s e(k) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

La expresión anterior del control PID discreto:

$$u(k) = u(k-1) + K_P[e(k) - e(k-1)] + K_I T_s e(k) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

es la llamada **forma velocidad**, o **control PID incremental**, porque la señal de control se calcula en forma incremental con respecto al valor anterior que tenía la señal de control a diferencia del *PID posicional* que utiliza una señal de control de referencia fija. En esencia, este control se calcula como una actualización o cambio del valor que tenía el control en el ciclo anterior, y de allí el nombre de **PID en forma velocidad**.

**Nota:** No confuda **control PID en velocidad** (**velocity PID form/algorithm**) con control PID de velocidad (velocity PID controller/velocity PID control).

## Ejercicio propuesto

La derivación empleando la *aproximación de Tustin* o *ZOH* resulta en una expresión similar del *control PID en forma incremental*. ¡Verifíquelo como ejercicio!

# Relación entre el PID Posicional y el PID Incremental

A pesar de que la estructura del algoritmo PID posicional y la del algoritmo en forma velocidad son distintas, en realidad están relacionadas.

Considere el controlador PID posicional de tiempo discreto:

$$u(k) = K_P e(k) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - e(k-1)] + u^*$$

Desplazando el control un periodo hacia atrás se tiene:

$$u(k-1) = K_P e(k-1) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k-1} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k-1) - e(k-2)] + u^*$$

Restando la expresión anterior a la original se obtiene la forma incremental:

$$u(k) = u(k-1) + K_P[e(k) - e(k-1)] + K_I T_s e(k) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

# Relación entre el PID Posicional y el PID Incremental

A pesar de que la estructura del algoritmo PID posicional y la del algoritmo en forma velocidad son distintas, en realidad están relacionadas.

Considere el controlador PID posicional de tiempo discreto:

$$u(k) = K_P e(k) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - e(k-1)] + u^*$$

Desplazando el control un periodo hacia atrás se tiene:

$$u(k-1) = K_P e(k-1) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k-1} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k-1) - e(k-2)] + u^*$$

Restando la expresión anterior a la original se obtiene la forma incremental:

$$u(k) = u(k-1) + K_P[e(k) - e(k-1)] + K_I T_s e(k) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

# Relación entre el PID Posicional y el PID Incremental

A pesar de que la estructura del algoritmo PID posicional y la del algoritmo en forma velocidad son distintas, en realidad están relacionadas.

Considere el controlador PID posicional de tiempo discreto:

$$u(k) = K_P e(k) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - e(k-1)] + u^*$$

Desplazando el control un periodo hacia atrás se tiene:

$$u(k-1) = K_P e(k-1) + K_I T_s \sum_{n=0}^{k-1} e(n) + \frac{K_D}{T_s}[e(k-1) - e(k-2)] + u^*$$

Restando la expresión anterior a la original se obtiene la forma incremental:

$$u(k) = u(k-1) + K_P[e(k) - e(k-1)] + K_I T_s e(k) + \frac{K_D}{T_s}[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

# Ventajas/Desventajas del PID Posicional

- Ventajas PID Posicional
  - Intuitivo, fácil de comprender.
- Desventajas PID Posicional
  - Implementación requiere un arreglo de memorias de largo creciente en el tiempo, exactamente $k$ para el periodo $k$.
  - Implementación requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlador en regimen permanente.
  - Comisionamiento (puesta en servicio y verificación de funcionamiento) es más complicada porque se requiere conocer el valor correcto de $u^*$.

# Ventajas/Desventajas del PID Posicional

- Ventajas PID Posicional
  - Intuitivo, fácil de comprender.
- Desventajas PID Posicional
  - Implementación requiere un arreglo de memorias de largo creciente en el tiempo, exactamente $k$ para el periodo $k$.
  - Implementación requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlador en regimen permanente.
  - Comisionamiento (puesta en servicio y verificación de funcionamiento) es más complicada porque se requiere conocer el valor correcto de $u^*$.

# Ventajas/Desventajas del PID Posicional

- Ventajas PID Posicional
  - Intuitivo, fácil de comprender.
- Desventajas PID Posicional
  - Implementación requiere un arreglo de memorias de largo creciente en el tiempo, exactamente $k$ para el periodo $k$.
  - Implementación requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlador en regimen permanente.
  - Comisionamiento (puesta en servicio y verificación de funcionamiento) es más complicada porque se requiere conocer el valor correcto de $u^*$.

# Ventajas/Desventajas del PID Posicional

- Ventajas PID Posicional
  - Intuitivo, fácil de comprender.
- Desventajas PID Posicional
  - Implementación requiere un arreglo de memorias de largo creciente en el tiempo, exactamente $k$ para el periodo $k$.
  - Implementación requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlador en regimen permanente.
  - Comisionamiento (puesta en servicio y verificación de funcionamiento) es más complicada porque se requiere conocer el valor correcto de $u^*$.

# Ventajas/Desventajas del PID Posicional

- Ventajas PID Posicional
  - Intuitivo, fácil de comprender.
- Desventajas PID Posicional
  - Implementación requiere un arreglo de memorias de largo creciente en el tiempo, exactamente $k$ para el periodo $k$.
  - Implementación requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlador en regimen permanente.
  - Comisionamiento (puesta en servicio y verificación de funcionamiento) es más complicada porque se requiere conocer el valor correcto de $u^*$.

# Ventajas/Desventajas del PID Posicional

- Ventajas PID Posicional
  - Intuitivo, fácil de comprender.
- Desventajas PID Posicional
  - Implementación requiere un arreglo de memorias de largo creciente en el tiempo, exactamente $k$ para el periodo $k$.
  - Implementación requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlador en regimen permanente.
  - Comisionamiento (puesta en servicio y verificación de funcionamiento) es más complicada porque se requiere conocer el valor correcto de $u^*$.

# Ventajas/Desventajas del PID Incremental

- Ventajas PID Incremental
  - Implementación solo requiere de un arreglo de memorias de largo 2 para $e(k-1)$ y $e(k-2)$.
  - Implementación no requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlar en regimen estacionario.
  - Comisionamiento es más sencillo porque no se requiere conocer el valor de $u^*$.
- Desventajas PID Incremental
  - No tiene mayores desventajas, y si bien, su derivación formal no es del todo intuitiva, se puede obtener fácilmente a partir de la versión PID Posicional sustrayendo de la expresión en tiempo $k$ aquella correspondiente en tiempo $k-1$.

# Ventajas/Desventajas del PID Incremental

- Ventajas PID Incremental
  - Implementación solo requiere de un arreglo de memorias de largo 2 para $e(k-1)$ y $e(k-2)$.
  - Implementación no requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlar en regimen estacionario.
  - Comisionamiento es más sencillo porque no se requiere conocer el valor de $u^*$.
- Desventajas PID Incremental
  - No tiene mayores desventajas, y si bien, su derivación formal no es del todo intuitiva, se puede obtener fácilmente a partir de la versión PID Posicional sustrayendo de la expresión en tiempo $k$ aquella correspondiente en tiempo $k-1$.

# Ventajas/Desventajas del PID Incremental

- Ventajas PID Incremental
  - Implementación solo requiere de un arreglo de memorias de largo 2 para $e(k-1)$ y $e(k-2)$.
  - Implementación no requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlar en regimen estacionario.
  - Comisionamiento es más sencillo porque no se requiere conocer el valor de $u^*$.
- Desventajas PID Incremental
  - No tiene mayores desventajas, y si bien, su derivación formal no es del todo intuitiva, se puede obtener fácilmente a partir de la versión PID Posicional sustrayendo de la expresión en tiempo $k$ aquella correspondiente en tiempo $k-1$.

# Ventajas/Desventajas del PID Incremental

- Ventajas PID Incremental
  - Implementación solo requiere de un arreglo de memorias de largo 2 para $e(k-1)$ y $e(k-2)$.
  - Implementación no requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlar en regimen estacionario.
  - Comisionamiento es más sencillo porque no se requiere conocer el valor de $u^*$.
- Desventajas PID Incremental
  - No tiene mayores desventajas, y si bien, su derivación formal no es del todo intuitiva, se puede obtener fácilmente a partir de la versión PID Posicional sustrayendo de la expresión en tiempo $k$ aquella correspondiente en tiempo $k-1$.

# Ventajas/Desventajas del PID Incremental

- Ventajas PID Incremental
  - Implementación solo requiere de un arreglo de memorias de largo 2 para $e(k-1)$ y $e(k-2)$.
  - Implementación no requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlar en regimen estacionario.
  - Comisionamiento es más sencillo porque no se requiere conocer el valor de $u^*$.
- Desventajas PID Incremental
  - No tiene mayores desventajas, y si bien, su derivación formal no es del todo intuitiva, se puede obtener fácilmente a partir de la versión PID Posicional sustrayendo de la expresión en tiempo $k$ aquella correspondiente en tiempo $k-1$.

# Ventajas/Desventajas del PID Incremental

- Ventajas PID Incremental
  - Implementación solo requiere de un arreglo de memorias de largo 2 para $e(k-1)$ y $e(k-2)$.
  - Implementación no requiere del conocimiento de la salida nominal $u^*$ del controlar en regimen estacionario.
  - Comisionamiento es más sencillo porque no se requiere conocer el valor de $u^*$.
- Desventajas PID Incremental
  - No tiene mayores desventajas, y si bien, su derivación formal no es del todo intuitiva, se puede obtener fácilmente a partir de la versión PID Posicional sustrayendo de la expresión en tiempo $k$ aquella correspondiente en tiempo $k-1$.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$
# 1/2

- La selección del tiempo de muestreo depende de la dinámica del proceso y la frecuencia o rapidez con varían las variables que se desea controlar.
- En la práctica, la selección del tiempo de muestreo también puede depender de cuantas señales son procesadas por el DCS (Distributed Control System = Sistema de Control Descentralizado) en el caso de plantas químicas... en otras palabras de la capacidad de procesamiento.
- Ejemplos:
  - Lazos de Flujo: $T_s = 1$ s.
  - Lazos de Nivel: $T_s = 5$ s.
  - Lazos de Temperatura: $T_s = 30$ s a 10 min.
- En general la selección de $T_s$ debe ser tal que:

$$T_s \leq 0.1T$$

donde $T$ es la constante de tiempo de la planta o el tiempo de respuesta asociado al polo dominante de la planta.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 1/2

- La selección del tiempo de muestreo depende de la dinámica del proceso y la frecuencia o rapidez con varían las variables que se desea controlar.
- En la práctica, la selección del tiempo de muestreo también puede depender de cuantas señales son procesadas por el DCS (Distributed Control System = Sistema de Control Descentralizado) en el caso de plantas químicas... en otras palabras de la capacidad de procesamiento.
- Ejemplos:
  - Lazos de Flujo: $T_s = 1$ s.
  - Lazos de Nivel: $T_s = 5$ s.
  - Lazos de Temperatura: $T_s = 30$ s a 10 min.
- En general la selección de $T_s$ debe ser tal que:

$$T_s \leq 0.1T$$

donde $T$ es la constante de tiempo de la planta o el tiempo de respuesta asociado al polo dominante de la planta.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 1/2

- La selección del tiempo de muestreo depende de la dinámica del proceso y la frecuencia o rapidez con varían las variables que se desea controlar.
- En la práctica, la selección del tiempo de muestreo también puede depender de cuantas señales son procesadas por el DCS (Distributed Control System = Sistema de Control Descentralizado) en el caso de plantas químicas... en otras palabras de la capacidad de procesamiento.
- Ejemplos:
  - Lazos de Flujo: $T_s = 1$ s.
  - Lazos de Nivel: $T_s = 5$ s.
  - Lazos de Temperatura: $T_s = 30$ s a 10 min.
- En general la selección de $T_s$ debe ser tal que:

$$T_s \leq 0.1T$$

donde $T$ es la constante de tiempo de la planta o el tiempo de respuesta asociado al polo dominante de la planta.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 1/2

- La selección del tiempo de muestreo depende de la dinámica del proceso y la frecuencia o rapidez con varían las variables que se desea controlar.
- En la práctica, la selección del tiempo de muestreo también puede depender de cuantas señales son procesadas por el DCS (Distributed Control System = Sistema de Control Descentralizado) en el caso de plantas químicas... en otras palabras de la capacidad de procesamiento.
- Ejemplos:
  - Lazos de Flujo: $T_s = 1$ s.
  - Lazos de Nivel: $T_s = 5$ s.
  - Lazos de Temperatura: $T_s = 30$ s a 10 min.
- En general la selección de $T_s$ debe ser tal que:

$$T_s \leq 0.1T$$

donde $T$ es la constante de tiempo de la planta o el tiempo de respuesta asociado al polo dominante de la planta.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 1/2

- La selección del tiempo de muestreo depende de la dinámica del proceso y la frecuencia o rapidez con varían las variables que se desea controlar.
- En la práctica, la selección del tiempo de muestreo también puede depender de cuantas señales son procesadas por el DCS (Distributed Control System = Sistema de Control Descentralizado) en el caso de plantas químicas... en otras palabras de la capacidad de procesamiento.
- Ejemplos:
  - Lazos de Flujo: $T_s = 1$ s.
  - Lazos de Nivel: $T_s = 5$ s.
  - Lazos de Temperatura: $T_s = 30$ s a 10 min.
- En general la selección de $T_s$ debe ser tal que:

$$T_s \leq 0.1T$$

donde $T$ es la constante de tiempo de la planta o el tiempo de respuesta asociado al polo dominante de la planta.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 1/2

- La selección del tiempo de muestreo depende de la dinámica del proceso y la frecuencia o rapidez con varían las variables que se desea controlar.
- En la práctica, la selección del tiempo de muestreo también puede depender de cuantas señales son procesadas por el DCS (Distributed Control System = Sistema de Control Descentralizado) en el caso de plantas químicas... en otras palabras de la capacidad de procesamiento.
- Ejemplos:
  - Lazos de Flujo: $T_s = 1$ s.
  - Lazos de Nivel: $T_s = 5$ s.
  - Lazos de Temperatura: $T_s = 30$ s a 10 min.
- En general la selección de $T_s$ debe ser tal que:

$$T_s \leq 0.1T$$

donde $T$ es la constante de tiempo de la planta o el tiempo de respuesta asociado al polo dominante de la planta.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 1/2

- La selección del tiempo de muestreo depende de la dinámica del proceso y la frecuencia o rapidez con varían las variables que se desea controlar.
- En la práctica, la selección del tiempo de muestreo también puede depender de cuantas señales son procesadas por el DCS (Distributed Control System = Sistema de Control Descentralizado) en el caso de plantas químicas... en otras palabras de la capacidad de procesamiento.
- Ejemplos:
  - Lazos de Flujo: $T_s = 1$ s.
  - Lazos de Nivel: $T_s = 5$ s.
  - Lazos de Temperatura: $T_s = 30$ s a 10 min.
- En general la selección de $T_s$ debe ser tal que:

$$T_s \leq 0.1T$$

donde $T$ es la constante de tiempo de la planta o el tiempo de respuesta asociado al polo dominante de la planta.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 2/2

- La selección de tiempos de muestreo muy cortos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - A menor tiempo de muestreo mayor debe ser la capacidad de procesamiento, lo cual se traduce en mayores costos de implementación (se requiere mejor hardware)
  - A menor tiempo de muestreo se vuelven más apreciables los efectos del ruido y especialmente tienden a hacer que las componentes de alta frecuencia se capturen y amplifiquen en la parte derivativa del control.
- La selección de tiempos de muestreo muy largos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - Se deteriora la estabilidad del sistema re-alimentado.
  - Se puede producir el fenómeno de aliasing de señales. Aliasing (de señales) se refiere a la situación en que las versiones muestreadas de dos señales distintas se vuelven indistinguibles una de la otra por el hecho de que el periodo de muestreo es demasiado largo.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 2/2

- La selección de tiempos de muestreo muy cortos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - A menor tiempo de muestreo mayor debe ser la capacidad de procesamiento, lo cual se traduce en mayores costos de implementación (se requiere mejor hardware)
  - A menor tiempo de muestreo se vuelven más apreciables los efectos del ruido y especialmente tienden a hacer que las componentes de alta frecuencia se capturen y amplifiquen en la parte derivativa del control.
- La selección de tiempos de muestreo muy largos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - Se deteriora la estabilidad del sistema re-alimentado.
  - Se puede producir el fenómeno de aliasing de señales. Aliasing (de señales) se refiere a la situación en que las versiones muestreadas de dos señales distintas se vuelven indistinguibles una de la otra por el hecho de que el periodo de muestreo es demasiado largo.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 2/2

- La selección de tiempos de muestreo muy cortos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - A menor tiempo de muestreo mayor debe ser la capacidad de procesamiento, lo cual se traduce en mayores costos de implementación (se requiere mejor hardware)
  - A menor tiempo de muestreo se vuelven más apreciables los efectos del ruido y especialmente tienden a hacer que las componentes de alta frecuencia se capturen y amplifiquen en la parte derivativa del control.
- La selección de tiempos de muestreo muy largos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - Se deteriora la estabilidad del sistema re-alimentado.
  - Se puede producir el fenómeno de aliasing de señales. Aliasing (de señales) se refiere a la situación en que las versiones muestreadas de dos señales distintas se vuelven indistinguibles una de la otra por el hecho de que el periodo de muestreo es demasiado largo.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 2/2

- La selección de tiempos de muestreo muy cortos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - A menor tiempo de muestreo mayor debe ser la capacidad de procesamiento, lo cual se traduce en mayores costos de implementación (se requiere mejor hardware)
  - A menor tiempo de muestreo se vuelven más apreciables los efectos del ruido y especialmente tienden a hacer que las componentes de alta frecuencia se capturen y amplifiquen en la parte derivativa del control.
- La selección de tiempos de muestreo muy largos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - Se deteriora la estabilidad del sistema re-alimentado.
  - Se puede producir el fenómeno de aliasing de señales. Aliasing (de señales) se refiere a la situación en que las versiones muestreadas de dos señales distintas se vuelven indistinguibles una de la otra por el hecho de que el periodo de muestreo es demasiado largo.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 2/2

- La selección de tiempos de muestreo muy cortos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - A menor tiempo de muestreo mayor debe ser la capacidad de procesamiento, lo cual se traduce en mayores costos de implementación (se requiere mejor hardware)
  - A menor tiempo de muestreo se vuelven más apreciables los efectos del ruido y especialmente tienden a hacer que las componentes de alta frecuencia se capturen y amplifiquen en la parte derivativa del control.
- La selección de tiempos de muestreo muy largos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - Se deteriora la estabilidad del sistema re-alimentado.
  - Se puede producir el fenómeno de aliasing de señales. Aliasing (de señales) se refiere a la situación en que las versiones muestreadas de dos señales distintas se vuelven indistinguibles una de la otra por el hecho de que el periodo de muestreo es demasiado largo.

# Selección del Periodo de Muestreo $T_s$ 2/2

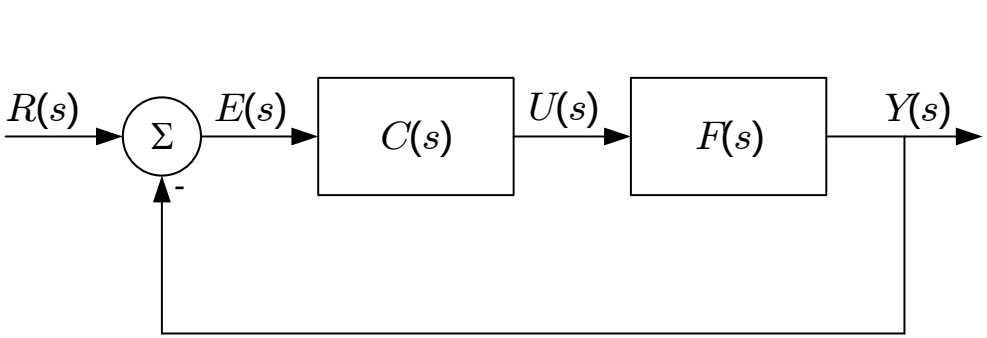
- La selección de tiempos de muestreo muy cortos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - A menor tiempo de muestreo mayor debe ser la capacidad de procesamiento, lo cual se traduce en mayores costos de implementación (se requiere mejor hardware)
  - A menor tiempo de muestreo se vuelven más apreciables los efectos del ruido y especialmente tienden a hacer que las componentes de alta frecuencia se capturen y amplifiquen en la parte derivativa del control.
- La selección de tiempos de muestreo muy largos puede ser poco recomendable en muchos casos porque:
  - Se deteriora la estabilidad del sistema re-alimentado.
  - Se puede producir el fenómeno de aliasing de señales. Aliasing (de señales) se refiere a la situación en que las versiones muestreadas de dos señales distintas se vuelven indistinguibles una de la otra por el hecho de que el periodo de muestreo es demasiado largo.

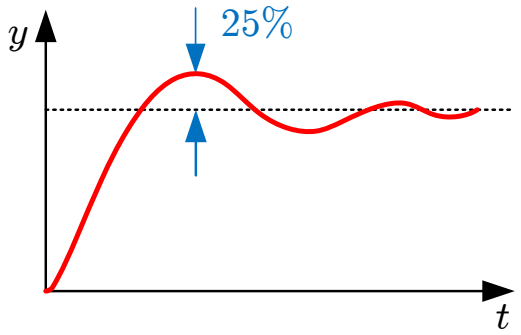
# Sintonización de Controladores PID

## Efectos de aumentar los parámetros indpenedientemente

| Parameter | Tiempo de respuesta | Overshoot | Tiempo de estabilización | Error en régimen permanente | Estabilidad |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_P \uparrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ | Cambio menor | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $K_I \uparrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | Se elimina | $\downarrow$ |
| $K_D \uparrow$ | Cambio menor | $\downarrow$ | $\downarrow$ | Sin efecto | $\uparrow$ si $K_D$ es pequeño |

# Método de Ziegler-Nichols (Z-N) para la sintonización de controladores PID para plantas estables




**Objetivo:** Encontrar los parámetros $K_P$, $T_I$, $T_D$ de un controlador PID de la forma:

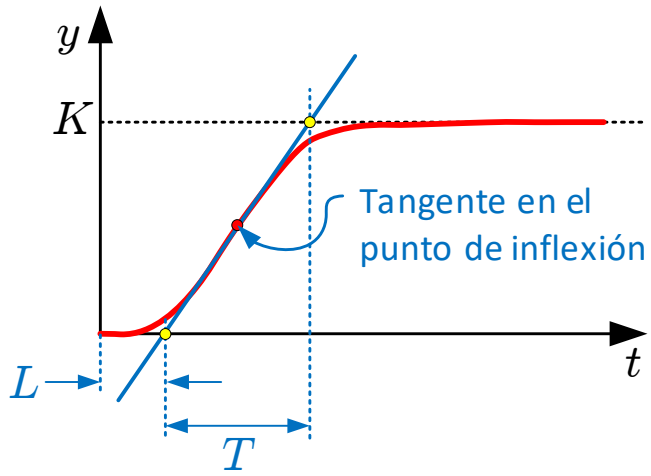
$$C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

tal que la respuesta de la planta en lazo cerrado ante un escalón de magnitud $K_0$ en la referencia sea de la forma que se muestra en la figura, **bajo el supuesto:**

$$F(s) = \frac{(K/K_0)e^{-Ls}}{Ts+1}$$

# Método 1 Z-N: Respuesta en lazo abierto

En este método, se aplica un escalón de magnitud $K_0$ a la planta en lazo abierto y se miden $T$ y $L$ a partir de la respuesta como se muestra en la figura.



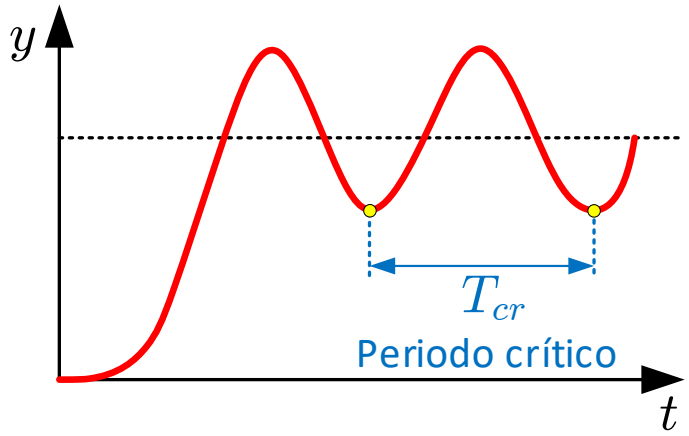

Las ganancias de controlador luego se fijan según:

| Tipo de controlador | $K_P$ | $T_I$ | $T_D$ |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{K_0 T}{KL}$ | $\infty$ | 0 |
| PI | $0.9\frac{K_0 T}{KL}$ | $\frac{L}{0.3}$ | 0 |
| PID | $1.2\frac{K_0 T}{KL}$ | $2L$ | $0.5L$ |

**Nota:** $K$ es la magnitud del cambio en la respuesta ante un escalón de magnitud $K_0$ en la entrada.

# Método 2 Z-N: Respuesta en lazo cerrado

En este método, la planta se realimenta sólo con ganancia proporcional y se aumenta su valor hasta que el sistema alcanza su inestabilidad con $K_P = K_{\text{crítico}}$. Ello genera oscilaciones de periodo $T_{cr}$ como se muestra en la figura.



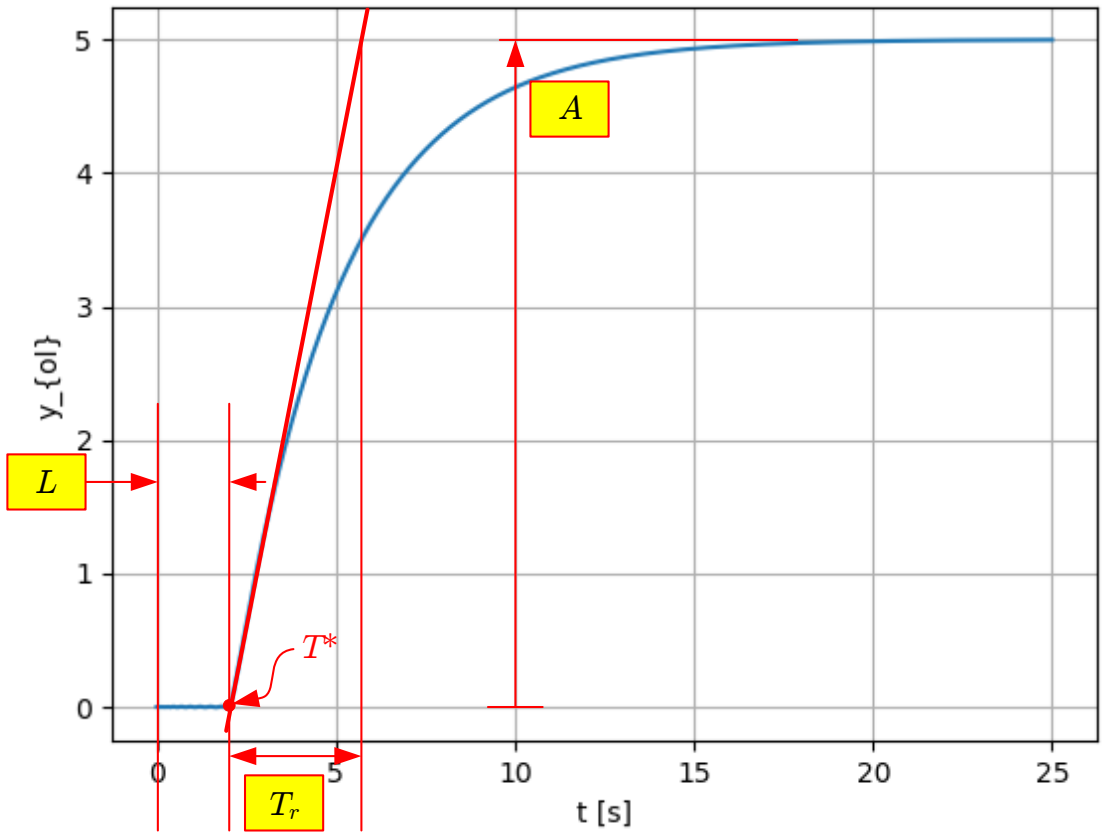

Las ganancias de controlador luego se fijan según:

| Tipo de controlador | $K_P$ | $T_I$ | $T_D$ |
|---|---|---|---|
| P | $0.5K_{cr}$ | $\infty$ | 0 |
| PI | $0.45K_{cr}$ | $\frac{T_{cr}}{1.2}$ | 0 |
| PID | $0.6K_{cr}$ | $\frac{T_{cr}}{2}$ | $0.125T_{cr}$ |

# Ejemplo 1: $F(s) = \frac{5e^{-2s}}{3s+1}$

## Método de Ziegler-Nichols 1

La respuesta al escalón unitario es estable como se esperaba, pero tiene un error en régimen permanente grande, ya que no converge al valor del escalón de referencia.



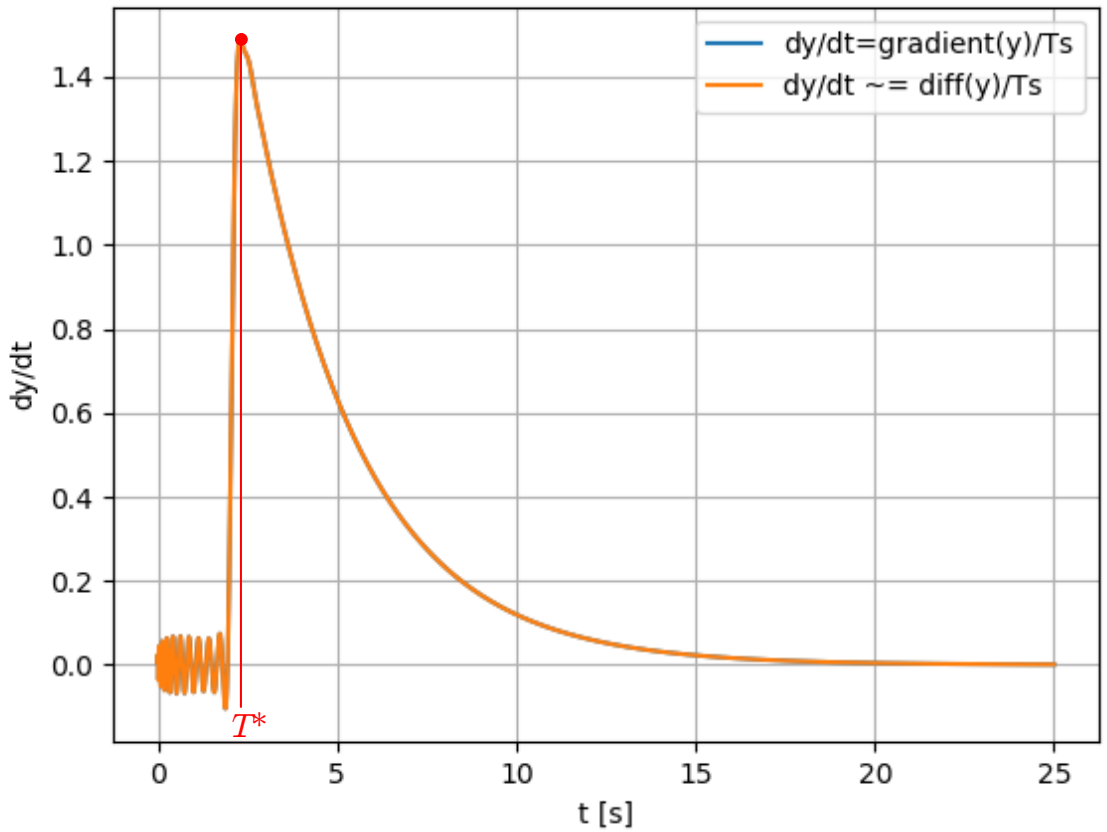

Las constantes $L$ y $T_r$ pueden obtenerse del gráfico ubicando el punto de máxima pendiente y trazando la recta tangente a la curva de respuesta:

$$T_r = 3.36 \text{ s}$$
$$L = 2.0 \text{ s}$$

# Ejemplo 1: $F(s) = \frac{5e^{-2s}}{3s+1}$

## Método de Ziegler-Nichols 1

El punto de máxima pendiente lo podemos encontrar con bastante exactitud calculando la derivada numéricamente a partir de los datos medidos.



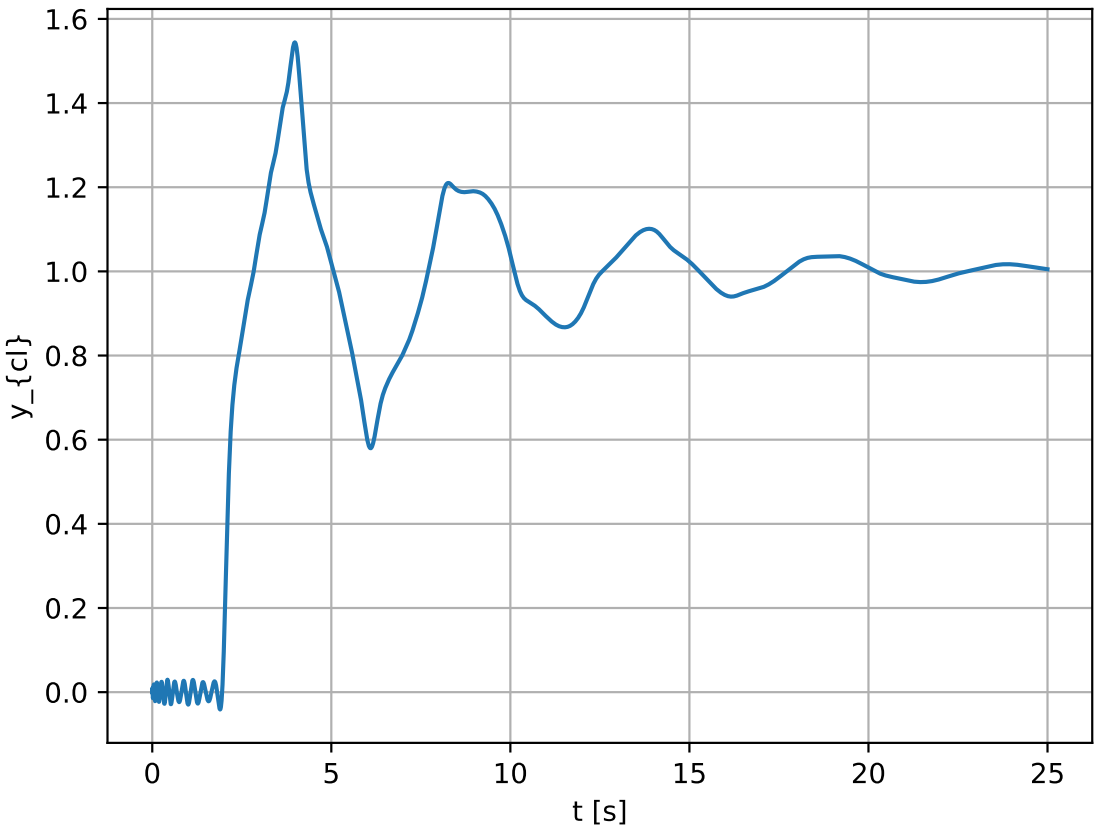

Si $A$ es la amplitud de la respuesta, $m$ es la pendiente máxima que ocurre en $T^*$, entonces:

$$T_r = \frac{A}{m}$$

# Ejemplo 1: $F(s) = \frac{5e^{-2s}}{3s+1}$

## Método de Ziegler-Nichols 1

La respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado con las ganancias del controlador PID calculadas por el 1$^{er}$ método de Ziegler-Nichols es estable.




Si $A$ es la amplitud de la respuesta, $m$ es la pendiente máxima que ocurre en $T^*$, entonces:

$$K_P = 1.2\frac{T_r}{A\,L} = 0.4032$$

$$T_I = 2L = 4.0$$

$$T_D = \frac{L}{2} = 1.0$$

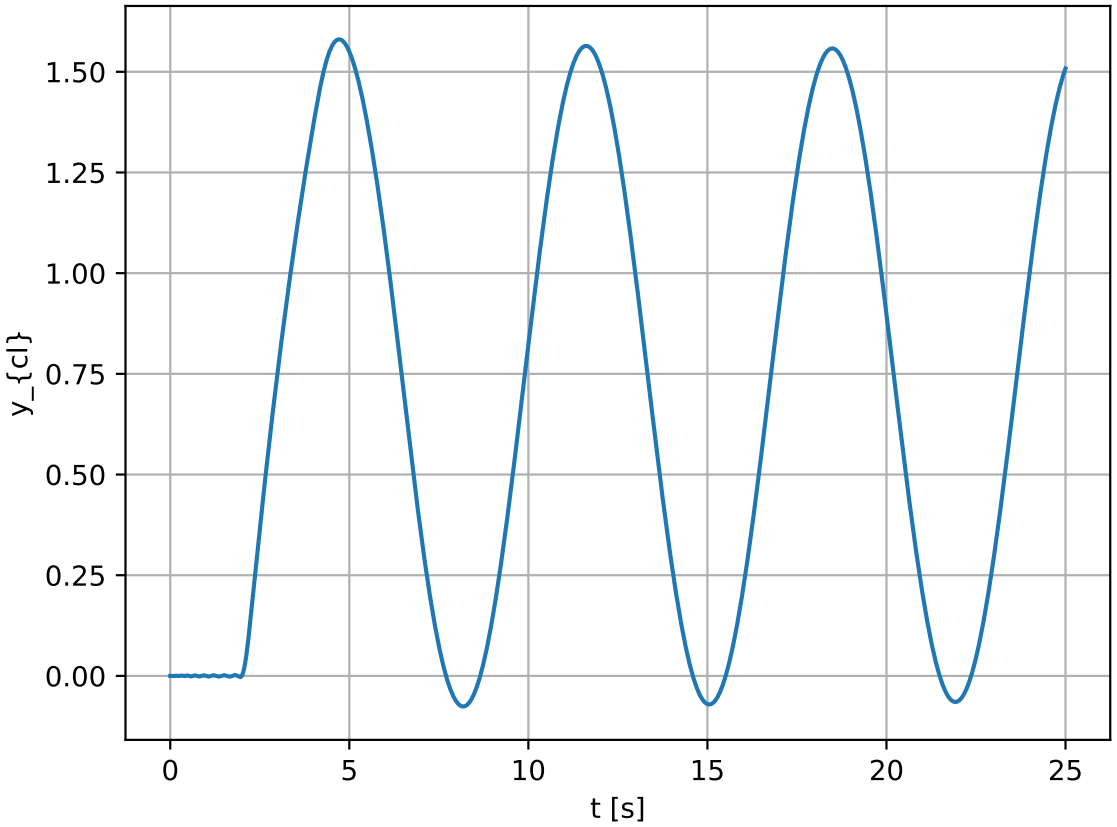
$$K_I = \frac{K_P}{T_I} = 0.10$$

$$K_D = K_P\,T_D = 0.4032$$

# Ejemplo 1: $F(s) = \frac{5e^{-2s}}{3s+1}$

## Método de Ziegler-Nichols 2

La respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado con un controlador puramente proporcional $K_P = K_c$ es críticamente estable.

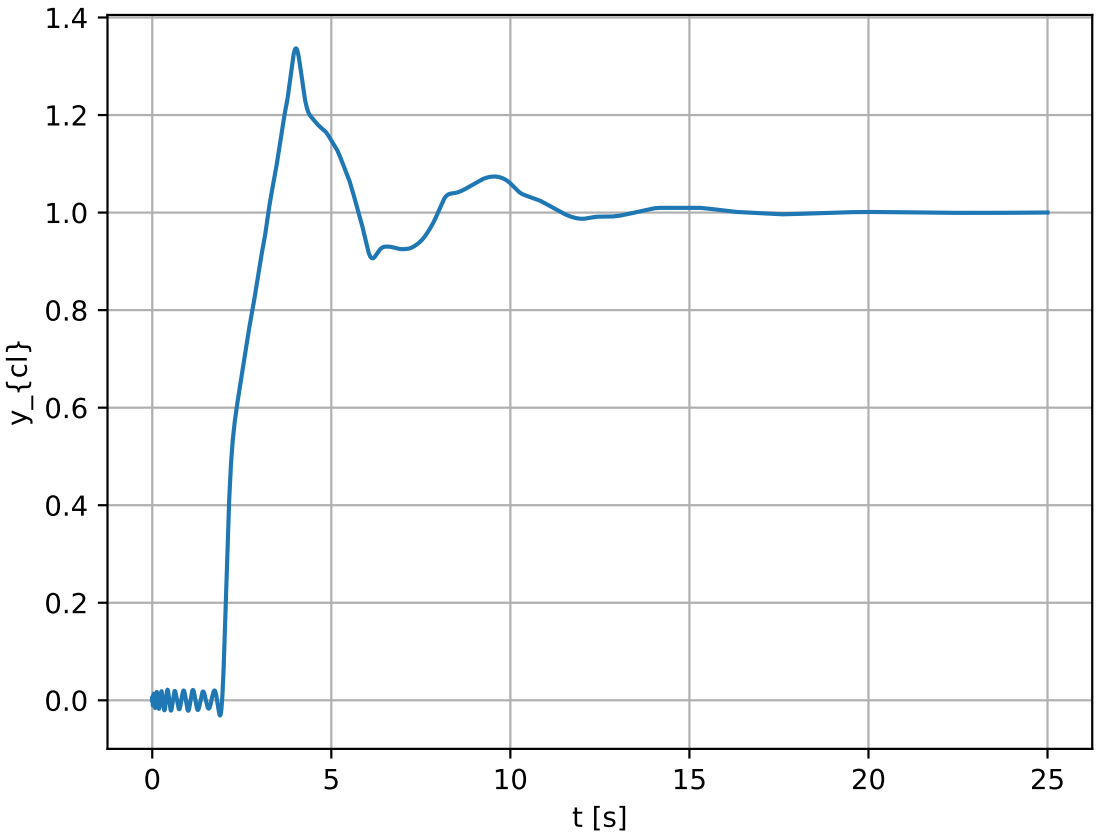



$$
\begin{aligned}
T_c &= 6.9 \\
K_c &= 0.5847 \\
K_P &= 0.6K_c = 0.3508 \\
T_I &= \frac{T_c}{2} = 3.45 \\
T_D &= 0.125T_c = 0.8625 \\
K_I &= \frac{K_P}{T_I} = 0.1017 \\
K_D &= K_P\,T_D = 0.3026
\end{aligned}
$$

# Ejemplo 1: $F(s) = \frac{5e^{-2s}}{3s+1}$

## Método de Ziegler-Nichols 2

La respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado con las ganancias del controlador PID calculadas por el 2$^{do}$ método de Ziegler-Nichols es estable.



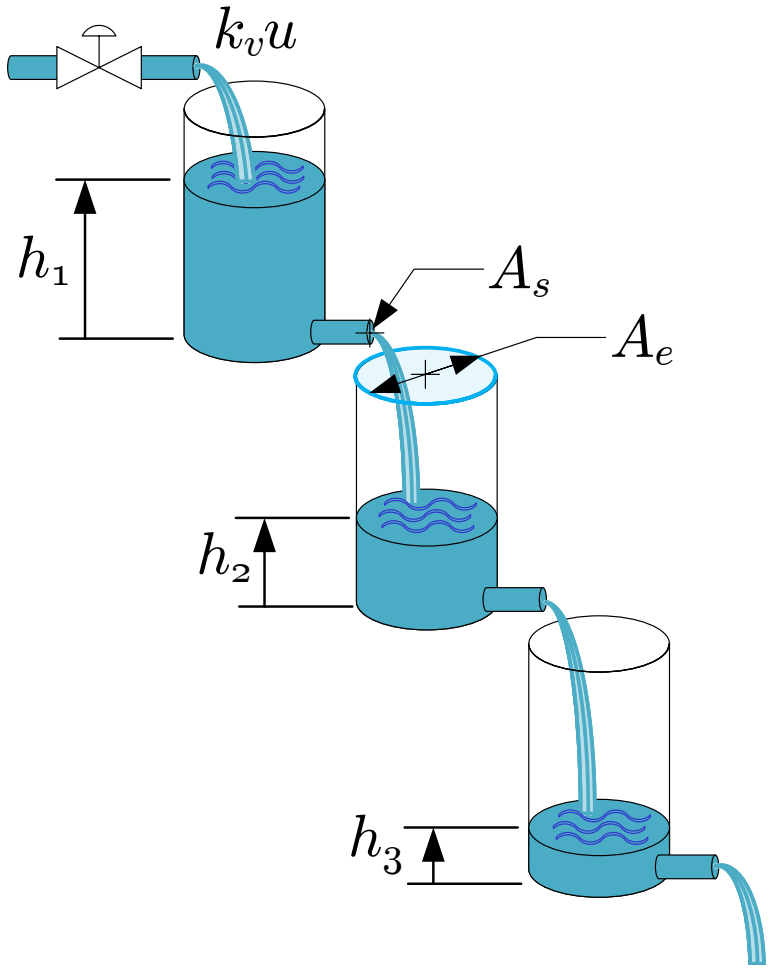

El segundo método tiene la ventaja de producir respuestas estables y no ser sensible al cálculo del retardo $L$, a diferencia del primer método de Ziegler-Nichols.

Observe el criterio cuártico.

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

CV: $h_3$ (nivel de líquido en el tercer estanque).

MV: $u$ (porcentaje de apertura de la válvula de alimentación al primer estanque).



# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

Modelo: Recordemos el modelo dinámico obtenido al principio del curso para un estanque:

$$A_e \dot{h} = \alpha h + \beta u$$

con

$$\alpha = -\frac{A_s}{A_e}\frac{g}{\sqrt{2gh^e}}$$
$$\beta = \frac{k_v}{A_e}$$

Es posible demostrar que la función de transferencia para el nivel $h_3$ con respecto a la variable manipulada $u$ está dada por:

$$F_3(s) = A_e^2\beta^2\frac{\beta^3}{(s-\alpha)^3} = \frac{A_e^2\beta^5}{s^3 - 3s^2\alpha + 3s\alpha^2 - \alpha^3}$$

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

Asumiendo:

$$\begin{aligned} A_e &= \pi \cdot 0.05^2 \text{ m}^2 \\ A_s &= \pi \cdot 0.01^2 \text{ m}^2 \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \\ h^e &= 1.0 \text{ m} \\ k_v &= 0.01 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

La función de transferencia está dada por:

$$F_3(s) = \frac{0.0002064}{s^3 + 0.2658s^2 + 0.02354s + 0.0006952}$$

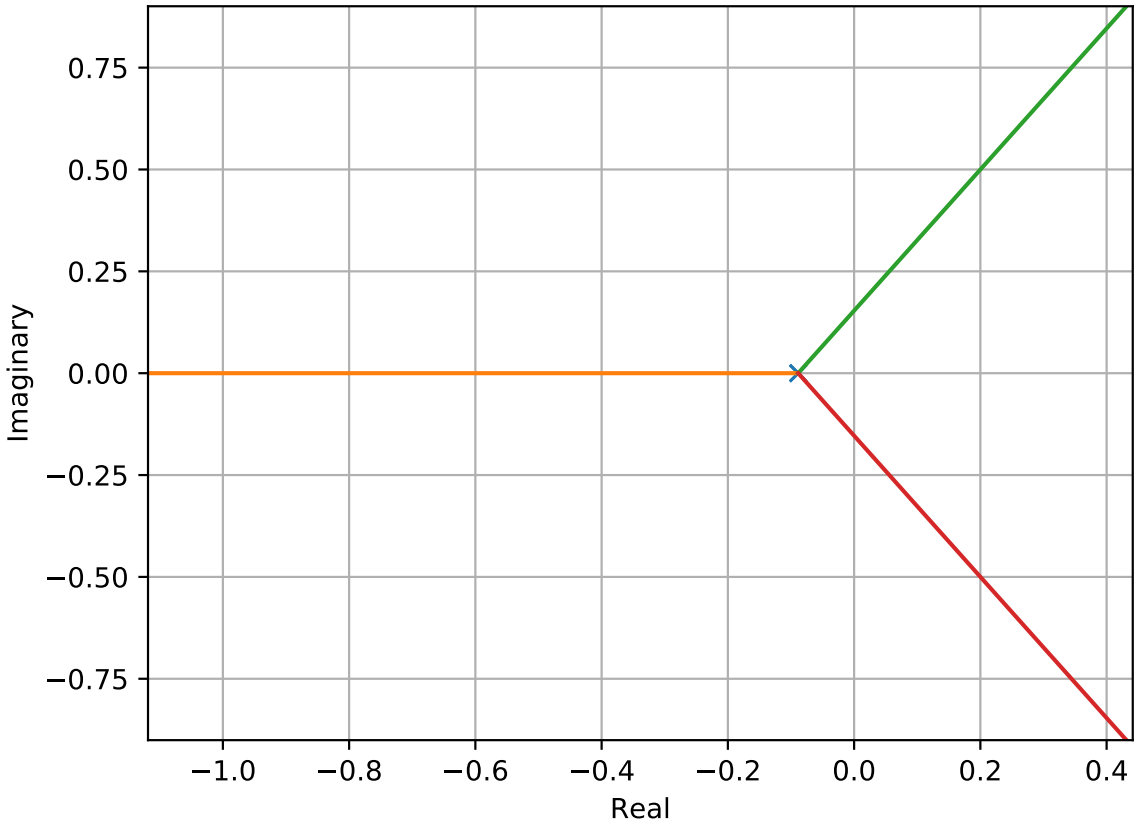
y las tres raíces son $s_{1,2,3} = \alpha = -0.0886$.

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

La respuesta al escalón en lazo abierto es estable porque $s_{1,2,3} \in \mathbb{C}_-$.

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

El lugar geométrico de las raíces generado por variaciones en la ganancia de un controlador puramente proporcional $C(s) = K$ es:



# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

La ganancia crítica $K_c$ se puede obtener utilizando el método de Routh-Hurwitz o directamente de la ecuación característica de lazo cerrado, sabiendo que $s = j\omega_c$ es una raíz de la ecuación característica de lazo cerrada para $K = K_c$:

$$\begin{aligned}
\bar{q}(s) &= 1 + K\frac{p(s)}{q(s)} = 0 \\
&= q(s) + Kp(s) = 0 \\
&\overset{s=j\omega_c}{=} q(j\omega_c) + K_c p(j\omega_c) = 0 \\
&= j(-\omega_c^2 + 3\alpha^2)\omega_c + (3\alpha\omega_c^2 - \alpha^3 + K_c A_e^2 \beta^5) = 0
\end{aligned}$$

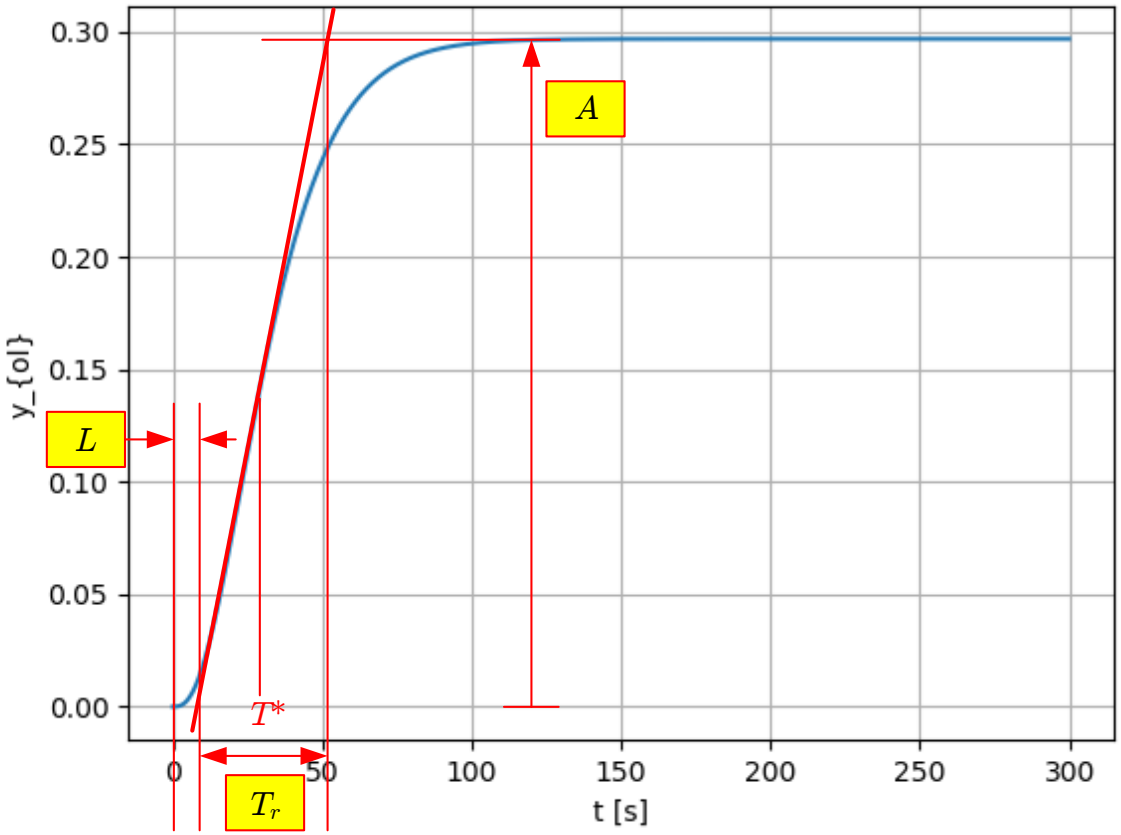
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\omega_c &= \pm\alpha\sqrt{3} = 0.1534 \\
K_c &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha\omega_c^2}{A_e^2\beta^5} = \frac{-8\alpha^3}{A_e^2\beta^5} = 26.9462
\end{aligned}$$

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

## Método de Ziegler-Nichols 1

La respuesta al escalón unitario es estable como se esperaba, pero tiene un error en régimen permanente grande, ya que no converge al valor del escalón de referencia.



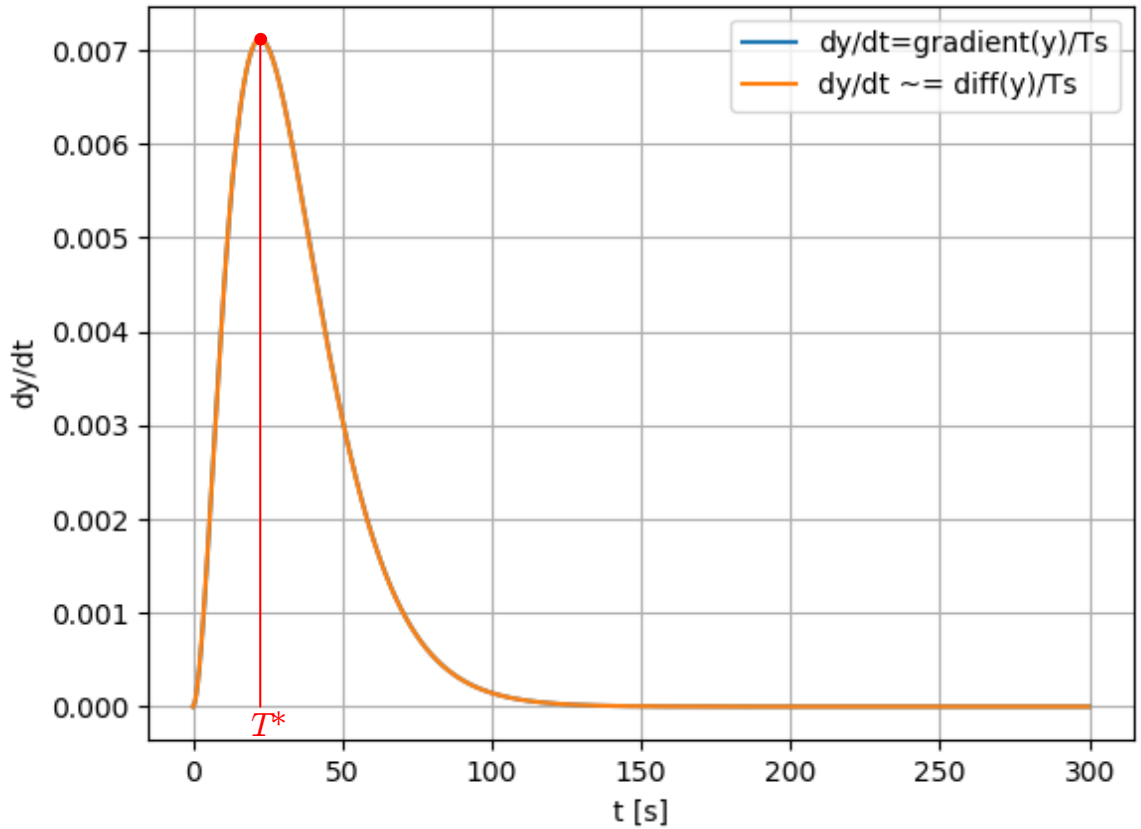

Las constantes $L$ y $T_r$ pueden obtenerse del gráfico ubicando el punto de máxima pendiente y trazando la recta tangente a la curva de respuesta:

$$T_r = 41.7045 \text{ s}$$
$$L = 1.7478 \text{ s}$$

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

## Método de Ziegler-Nichols 1

El punto de máxima pendiente lo podemos encontrar con bastante exactitud calculando la derivada numéricamente a partir de los datos medidos.




Si $A$ es la amplitud de la respuesta, $m$ es la pendiente máxima que ocurre en $T^*$, entonces:

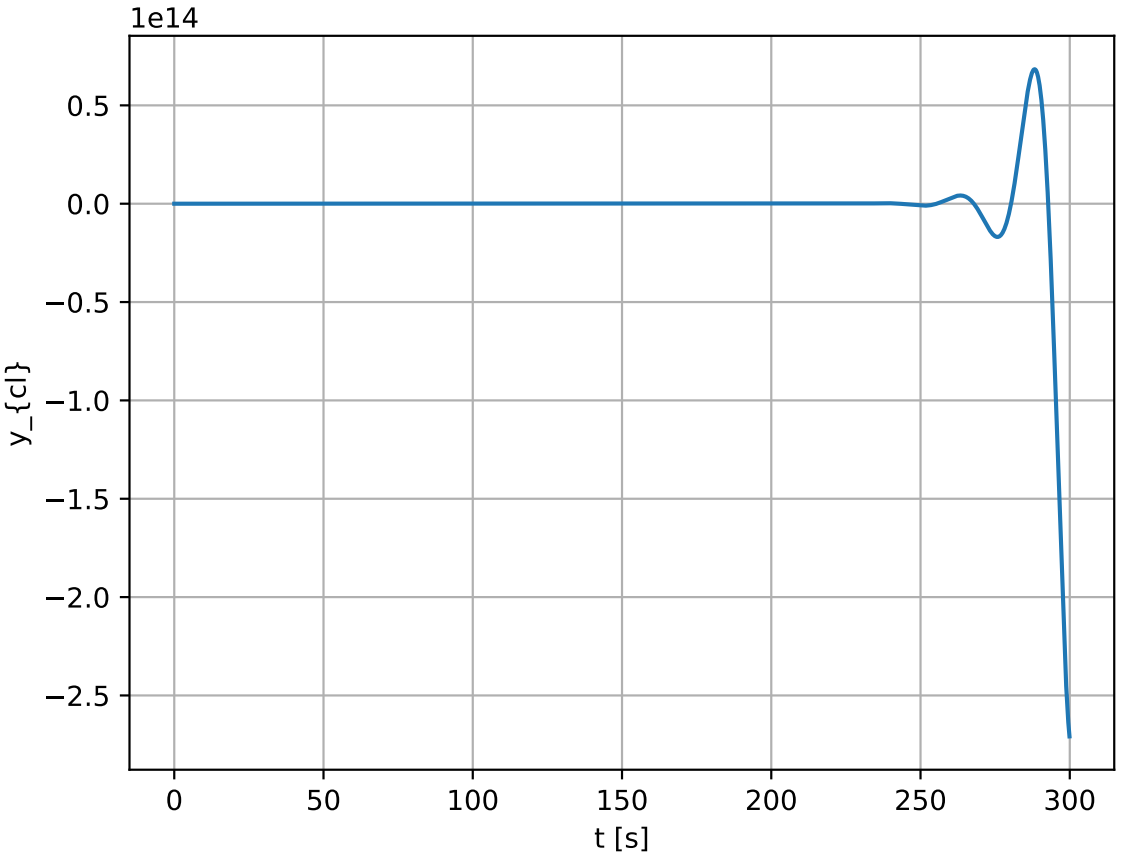
$$T_r = \frac{A}{m}$$

$$L = T^* - \frac{T_r}{2}$$

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

## Método de Ziegler-Nichols 1

La respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado con las ganancias del controlador PID calculadas por el 1$^{er}$ método de Ziegler-Nichols es inestable porque $K_P \gg K_c$!




Si $A$ es la amplitud de la respuesta, $m$ es la pendiente máxima que ocurre en $T^*$, entonces:

$$K_P = 1.2\frac{T_r}{A\,L} = 96.45$$

$$T_I = 2L = 3.50$$

$$T_D = \frac{L}{2} = 0.87$$

$$K_I = \frac{K_P}{T_I} = 27.59$$

$$K_D = K_P\,T_D = 84.28$$

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

## Método de Ziegler-Nichols 1

¡El método de Ziegle-Nichols puede fallar y no entregar las ganancias correctas para controlador!

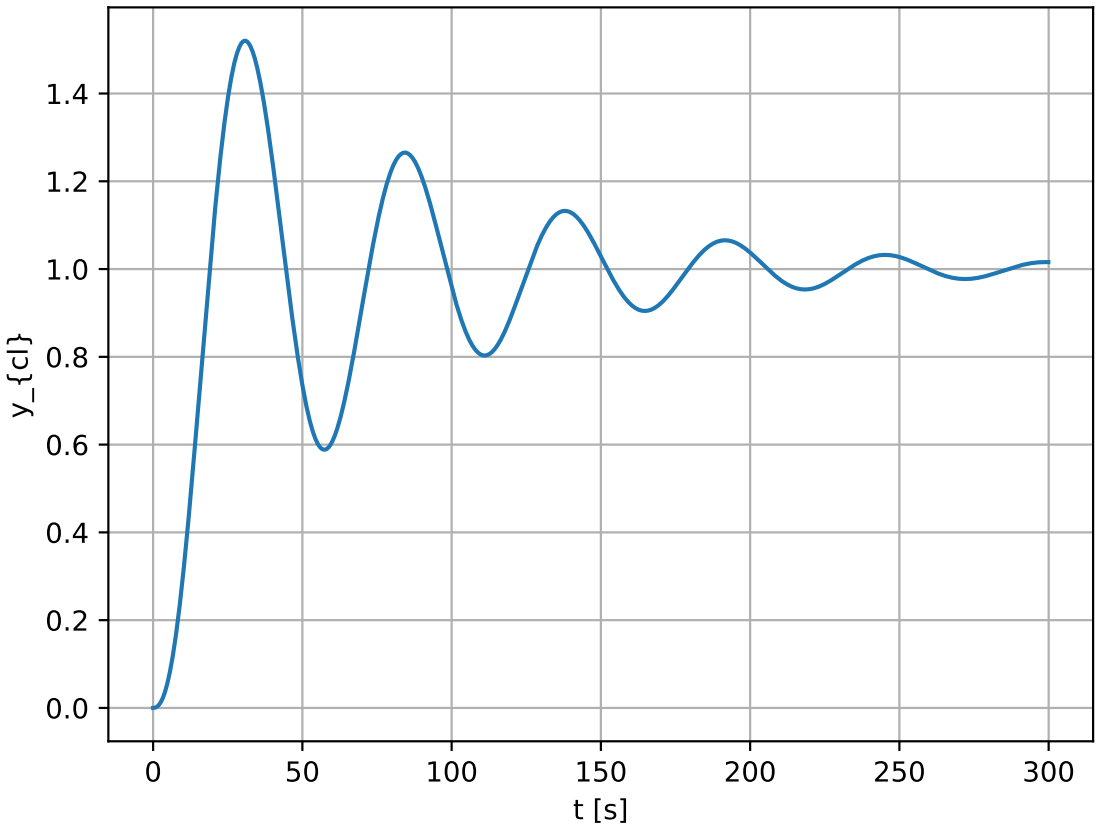
Sin embargo, el método ofrece valores tentativos que pueden servir para iniciar la búsqueda.

¿Por qué falla el método en este caso? ¿Por qué entrego una ganancia $K_P > K_c$?

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

## Método de Ziegler-Nichols 1

En vez de utilizar la ganancia $K_P$ entregada por el 1$^{er}$ método de Ziegler-Nichols, podemos usar $K_P = \frac{K_c}{2}$, y reducir en un factor 0.1, manteniendo el la reglas restantes del método. De esta manera podemos obtener una respuesta al escalón unitario que es estable y cuyo error en régimen permanente es nulo.



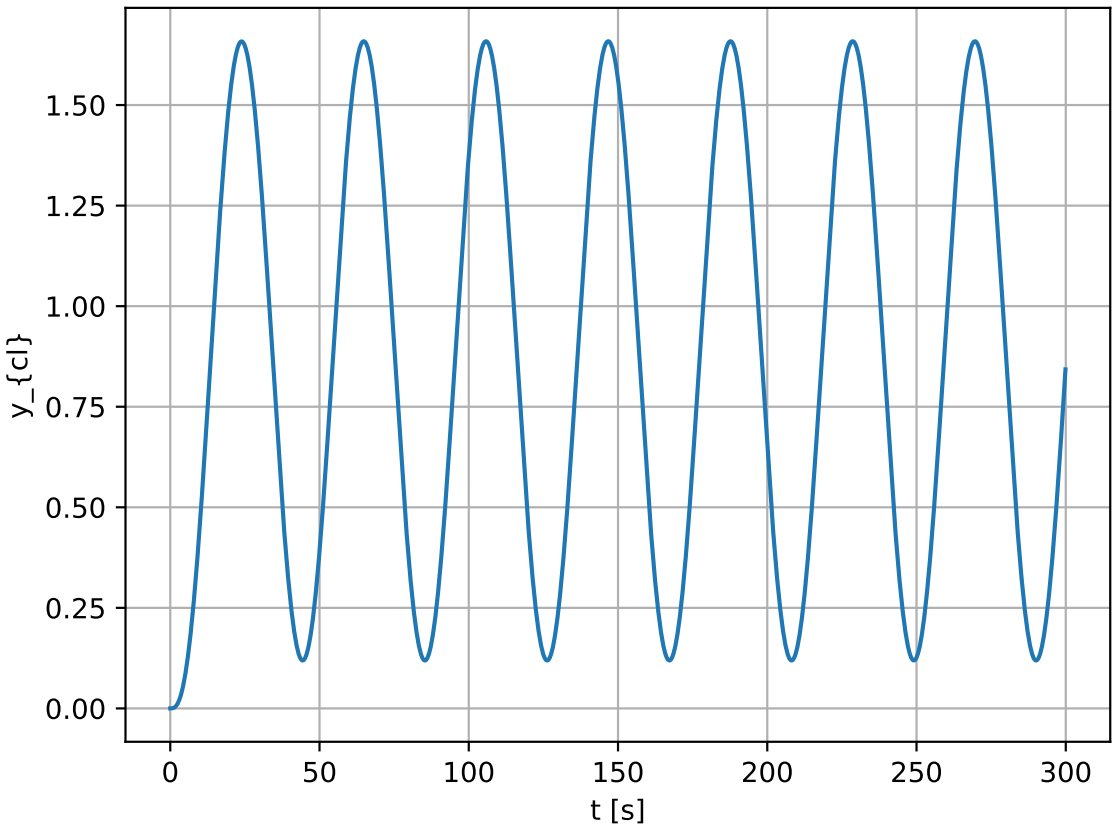

Ganancias modificadas:

$$K_P = \frac{K_c}{2} = 13.47$$
$$T_I = 2L = 3.50$$
$$T_D = \frac{L}{2} = 0.87$$
$$K_I = \frac{1}{10}\frac{K_P}{T_I} = 0.38$$
$$K_D = K_P T_D = 40.95$$

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

## Método de Ziegler-Nichols 2

La respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado con un controlador puramente proporcional $K_P = K_c$ es críticamente estable.

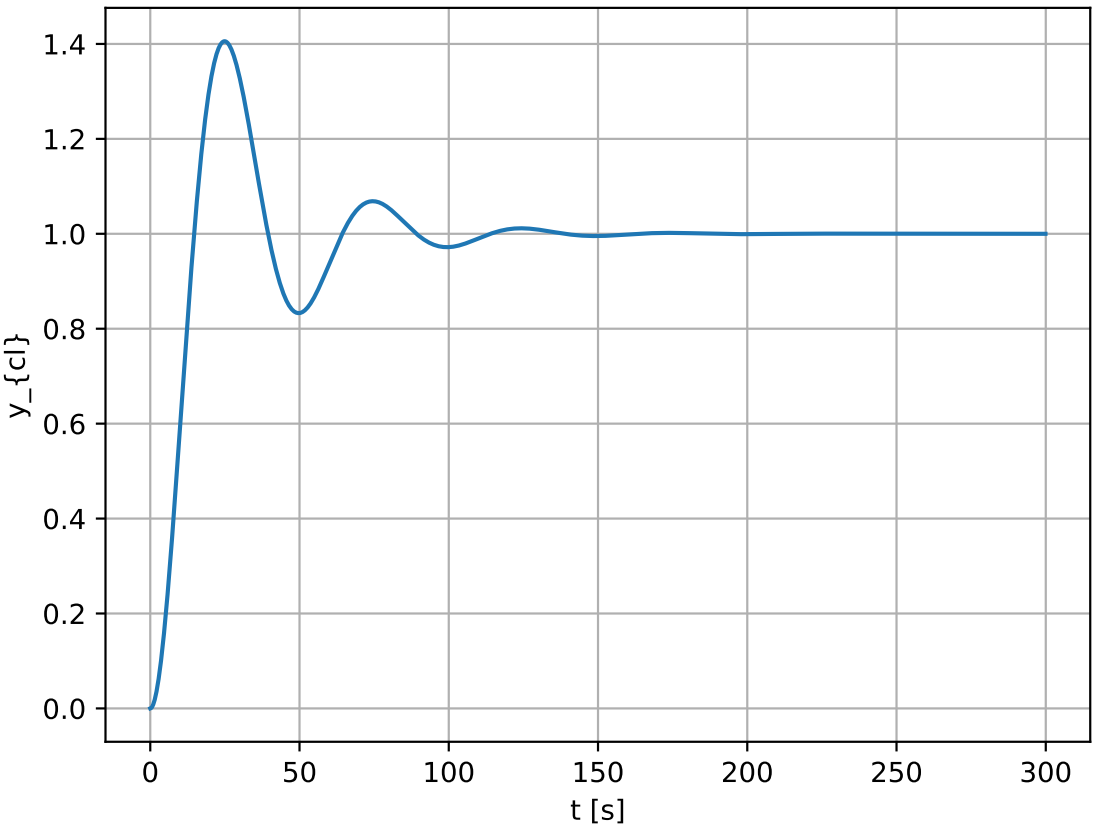



$$
\begin{aligned}
\omega_c &= \pm\alpha\sqrt{3} = 0.1534 \\
T_c &= \frac{2\pi}{\omega_c} = 40.9487 \\
K_c &= \frac{-8\alpha^3}{A_e^2\beta^5} = 26.9462 \\
K_P &= 0.6K_c = 16.1677 \\
T_I &= \frac{T_c}{2} = 20.4743 \\
T_D &= 0.125T_c = 5.1186 \\
K_I &= \frac{K_P}{T_I} = 0.7897 \\
K_D &= K_P\,T_D = 82.7559
\end{aligned}
$$

# Ejemplo 2: Control de nivel en sistema de 3 estánques

## Método de Ziegler-Nichols 2

La respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado con las ganancias del controlador PID calculadas por el $2^{do}$ método de Ziegler-Nichols es estable.




El segundo método tiene la ventaja de producir respuestas estables y no ser sensible al cálculo del retardo $L$, a diferencia del primer método de Ziegler-Nichols.

Observe el criterio cuártico.

# Resumen de Ventajas/Desventajas del Método de Sintonización de Ziegler-Nichols

| Método | Ventajas | Desventajas |
|---|---|---|
| Lazo abierto | • Simple y rápido.<br>• Popular. | • Sensible a la estimación incorrecta de $T/L$.<br>• Valores de $K_I$ y $K_D$ dependen solo de $L$.<br>• Valores de $K_P$, $K_I$, $K_D$ pueden ser incorrectos para sistemas que se alejan de la planta tipo. |
| Lazo cerrado | • Menor error al medir $K_c$ y $T_c$ que $A$, $T_r$ y $L$.<br>• Incluye la dinámica del proceso en lazo cerrado, lo que entrega una mejor caracterzación del comportamiento del sistema. | • La realización de los experimentos puede requerir más tiempo.<br>• Difícil de aplicar experimentalmente por los riesgos de inestabilizar el sistema. |

# Referencias Adicionales


- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. Feedback Control of Dynamic Systems. 4ª ed. (1ª ed. 1986), Prentice Hall, 2002.
- G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado. Control System Design. Prentice Hall, 2001.

# Referencias Adicionales


- H. Nyquist. Regeneration Theory. Bell Systems and Technology Journal, v. 11, pp. 126-147, 1932.
- H. W. Bode. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand, New York, 1945.
- H. W. Bode. Feedback: The history of an idea. Proceedings of the Conference on Circuits and Systems, New York, 1960. Re-impreso en R. Bellman, R. Kalaba, eds. Mathematical Trends in Control Theory. Dover, New York, 1964.
- J. G. Ziegler, N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. Trans. ASME, v. 64, pp. 759-768, 1942.
- J. G. Ziegler, N. B. Nichols. Process lags in automatic control circuits. Trans. ASME, v. 65, n. 5, pp. 433-444, Julio 1943.