Tema: Criterio de estabilidad del lugar geométrico de las raíces (LGR)

◁ *Guía de Ejercicios # 15* ▷

1. En la figura 1 se muestra un diagrama de bloques de un servomotor DC con control proporcional y derivativo $K(s) = K_p + K_d s$.

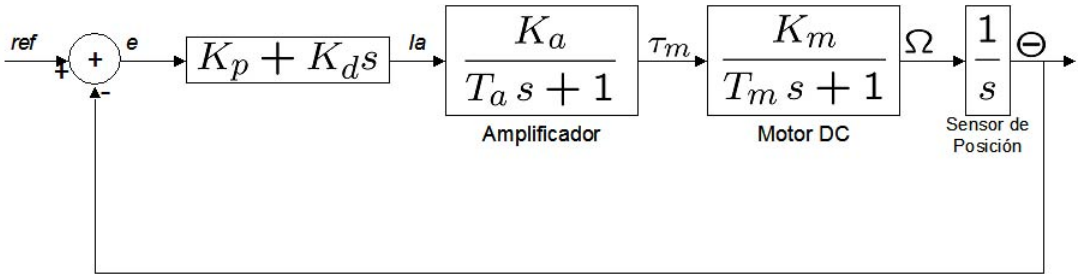


Figura 1: Modelo de un servomotor con control PD (proporcional-derivativo).

(a) Trace el LGR para $T_a < T_m$, $K_a > 0$, $K_m > 0$, $K_p > 0$, $K_d > 0$ frente a variaciones de la ganacia del amplificador K_a.

Los polos del sistema en lazo abierto son:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= -\frac{1}{T_m} \\ p_3 &= -\frac{1}{T_a} \end{aligned}$$

Los ceros del sistema en lazo abierto (considerando el controlador) como parte de la planta:

$$z_1 = -\frac{K_p}{K_d}$$

Estos polos y ceros se grafican en el plano según tres casos que se muestran a continuación. Cabe además destacar que tanto polos como ceros se encuentran sobre el eje real y que el número de polos es $n = 3$ y ceros $m = 1$. Por lo tanto, de los tres polos uno tenderá al cero, los $n - m = 2$ polos restantes tenderán hacia las asíntotas.

Origen de las asíntotas:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{3} p_i - z_i}{2} = -\frac{T_a + T_m}{2T_a T_m} + \frac{K_p}{2K_d}$$

Angulo de las asíntotas:

$$\phi_k = \frac{2k-1}{n-m} 180°, \ k = 1, 2$$

por lo tanto,

$$\phi_k = \{90°, 270°\}$$

Como no hay polos o ceros complejos, ya que todos yacen sobre el eje real, el ángulo de salida desde los polos, o de llegada a los ceros, será siempre $0°$ o $180°$. En este caso trivial no es necesario hacer el cáculo formal de los ángulos de salida o llegada.

Por último queda encontrar el punto de despegue desde el eje real del LGR. Para esto debemos resolver la ecuación:

$$\frac{dF^{-}1(s))}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{(T_a s+1)(T_m s+1)s}{K_a K_m(K_p+K_d s)} = 0$$

Reagrupando términos y calculando la derivda con respecto a s:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{T_a T_m s^3+(T_a+T_m)s^2+s}{K_a K_m(K_p+K_d s)}\right) = \frac{[3T_a T_m s^2+2(T_a+T_m)s+1](K_p+K_d s)-K_d[T_a T_m s^3+(T_a+T_m)s^2+s]}{[K_a K_m(K_p+K_d s)]^2}$$

Luego deberá encontrarse el valor de s que hace que el numerador de la expresión anterior sea cero, para un s entre el valor de los dos polos que tienden a las asíntotas, es decir deberá reolverse:

$$\begin{aligned}[3T_a T_m s^2+2(T_a+T_m)s+1](K_p+K_d s)-K_d[T_a T_m s^3+(T_a+T_m)s^2+s] &= 0\\ 2T_a T_m K_d s^3+[K_d(T_a+T_m)+3T_a T_m K_p]s^2+2K_p(T_a+T_m)s+K_p &= 0\end{aligned}$$

La ecuación anterior es de orden 3, y aunque existen formulas analítcas para las soluciones de ecuaciones polinomiales de orden 3, estas son sumamente extensas. En este caso, para efectos prácticos conviene resolver la ecuación anterior numéricamente. Como no hay valores numéricos el ejercicio concluye aquí.

Caso 1: $p_2 < z_1 < p_1$

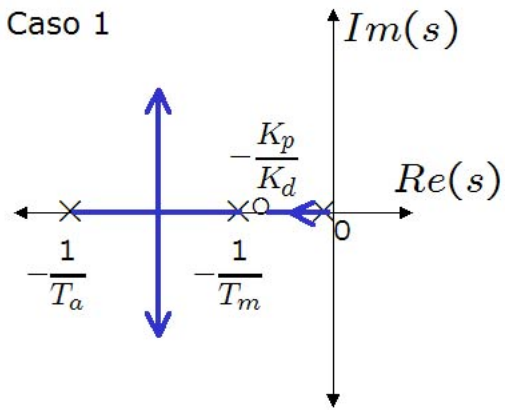


Figura 2: LGR de $F(s)$ para variaciones en K_a.

Caso 2: $p_3 < z_1 < p_2$

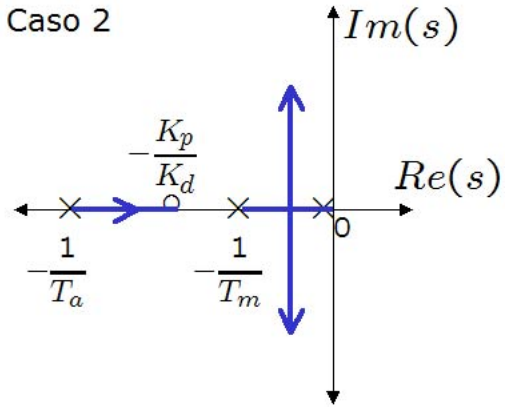


Figura 3: LGR de $F(s)$ para variaciones en K_a.

Caso 3: $z_1 < p_i$, $i = 2, 3$

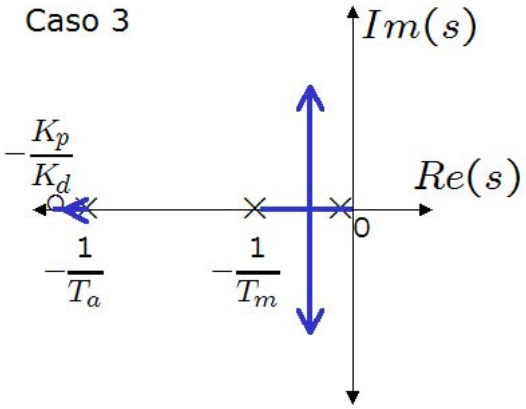


Figura 4: LGR de $F(s)$ para variaciones en K_a.

(b) Trace el LGR para variaciones de la ganancia derivativa K_d asumiendo que el controlador es puramente derivativo, es decir $K_p = 0$, y además $T_a = T_m = 1$, $K_a = 1$, $K_m = 10$.
Con los valores indicados para las ganancias y tiempos de respuesta, a partir de los resultados anteriores se obtiene que los polos del sistema en lazo cerrado son:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= -1 \\ p_3 &= -1 \end{aligned}$$

Los ceros del sistema en lazo abierto (considerando el controlador) como parte de la planta:

$$z_1 = 0$$

En este caso el sistema nunca será estrictamente estable, ya que el polo p_1 siempre tenderá hacia el cero z_1. Notese que aunque el polo y el cero $s = 0$ se cancelan algebraicamente de la función

de transferencia en lazo cerrado, no es correcto eliminarlos. En la práctica ocurre que el cero o el polo no son exactamente iguales entre si, y es muy posible que el cero $z_1 = \epsilon$ tenga un valor muy pequeño distinto de cero.

También cabe destacar que si $K_p = 0$ el elemento d de la tabla de $R - H$ es cero, por lo tanto el criterio implica que el sistema no será asintóticamente estable.

Con los valores podemos calcular el punto de despegue de las asíntotas como:

$$a = \frac{(0 - 1 - 1) - (0)}{2} = -1$$

Además el punto de despegue desde el eje real debería estar también en ell lugar donde se ubican los polos p_2 y p_3, por lo tanto $s = -1$ debería satisfacer la ecuación:

$$2s^3 + 2s^2 = 2s^2(s + 1) = 0$$

La ecuación anterior corresponde a reemplazar los valores $T_a = T_m = 1$, $K_p = 0$ en la ecuación del punto de despegue calculada en (c), y además colocar $K_d = 1$. Se coloca $K_d = 1$ porque en esta pregunta se pide analizar las variaciones del lazo cerrado frente a variaciones en K_d, luego este parámetro debe sacarse de la función de transferencia de la rama directa y emplearse como parámetro libre. La manera formal de verificarlo es separando el parámetro de interés del resto de términos que depende de s como se explicó en clases. Para esto, si $G(s)$ es la combinación de las funciones de transferencia del amplificador, motor y sensor, entonces la ecuación característica de lazo cerrado sería:

$$\bar{q}(s) = 1 + (K_p + K_d s)G(s) = 1 + K_p G(s) + K_d s G(s) = 0.$$

Dividiendo la ecuación caracterísitca $\bar{q}(s)$ por $1 + K_p G(s)$ esta quedará:

$$\bar{q}(s) = 1 + (K_p + K_d s)G(s) = 1 + K_d \frac{sG(s)}{1 + K_p G(s)} = 1 + K_d F(s) = 0.$$

Luego el procedimiento del LGR debe aplicarse a analizar una planta ficticia:

$$F(s) = \frac{sG(s)}{1 + K_p G(s)} = \frac{s p_G(s)}{q_G(s) + K_p p_G(s)}$$

donde $p_G(s)$ y $q_G(s)$ son el numerador y del denominador de $G(s)$ respectivamente.

Finalmente, el LGR para este sistema estará dado por el siguiente diagrama:

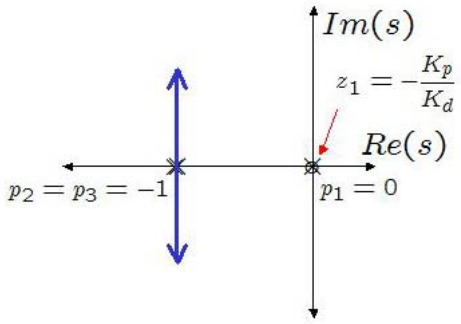
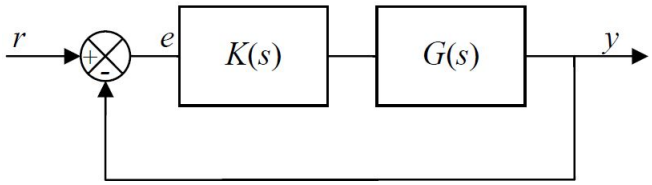


Figura 5: LGR de $F(s)$ para variaciones en K_d con $K_p = 0$, $T_a = T_m = 1$.

2. Considere el siguiente sistea realimentado



En donde se tiene que:

$$K(s) = K \qquad\qquad G(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 2}$$

Se pide bosquejar el LGR del sistema realimentado.

Solución

La ecuación característica del sistema realimentado es $\bar{q}(s) = 1 + KG(s)$, la está escrita de la forma adecuada $1 + KF(s)$, por lo que $F(s) = G(s)$.

La función de transferencia $G(s)$ tiene un único cero dado por $z_1 = -1$, y dos polos dados por:

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm j$$

Denominaremos $p_1 = 1 + j$, $p_2 = 1 - j$. Ahora que ya tenemos los polos y ceros de $G(s)$, determinaremos los segmentos en el eje real en los cuales tendremos parte del LGR. El intervalo $[-\infty, -1]$ está a la izquierda de 3 polos y ceros, por lo que en el hay LGR.

Solo existe una asíntota, porque $n = 2$, $m = 1$ y el número de polos que siguen una asíntota es $n - m = 1$. El punto de inicio de la asíntota está dado por:

$$a_{\text{asíntota}} = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n_p - n_z} = \frac{(1+j) + (1-j) - (-1)}{2-1} = 3$$

El ángulo de la asíntota está dado por

$$\phi_1 = \frac{(2k-1)}{n-m} 180^\circ = 180^\circ$$

Hay una sola asíntota, con ángulo 180° respecto a la horizontal que es el mimso eje real. No era necesario calcularla porque es un resultado obvio por la regla del LGR sobre el eje real. Sin embargo, la calculamos para mostrar la consistencia entre los pasos del procedimiento para graficar el LGR.

Calculamos ahora el punto de aterrizaje de los polos resolviendo:

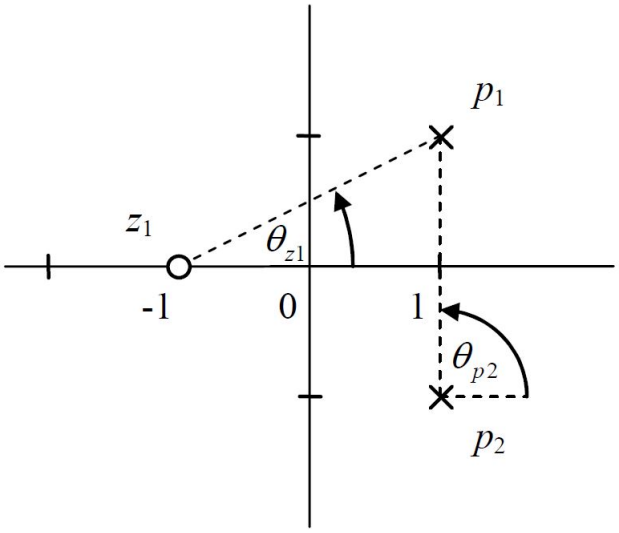
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{G(s)}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{s^2 + 2s - 4}{(s+1)^2} = 0$$

Resollviendo la ecuación obtenemos que $s = -1 \pm \sqrt{5}$. El valor positivo lo descartamos, ya que cae en una zona donde sabemos que no hay LGR en el eje real. Por lo tanto, el punto de aterrizaje lo situamos en $s_a = -1 - \sqrt{5}$.

El ángulo de salida desde cada polo y llegada a cada cero se calculan con las siguientes fórmulas:

$$\sum_i \psi_i - \sum_j \phi_j = -180^\circ \tag{1}$$

Calcularemos el ángulo de salida del polo p_1. Se construye entonces el siguiente diagrama



Del diagrama se aprecia que $\theta_{p2} = 90^\circ$, y que

$$\theta_{z1} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26.57^\circ$$

Luego, con $\psi_1 = \theta_{z1}$ y $\phi_1 = \theta_{p1}$ se tiene que:

$$\phi_1^{sal} = \psi_1 - \phi_1 + 180^\circ = 26.57^\circ - 90^\circ + 180^\circ = 116.57^\circ$$

Por simetría de polos conjugados, $\phi_2^{sal} = -116,57^\circ$. Además, es claro que $\psi_1^{llegada} = 180^\circ$.

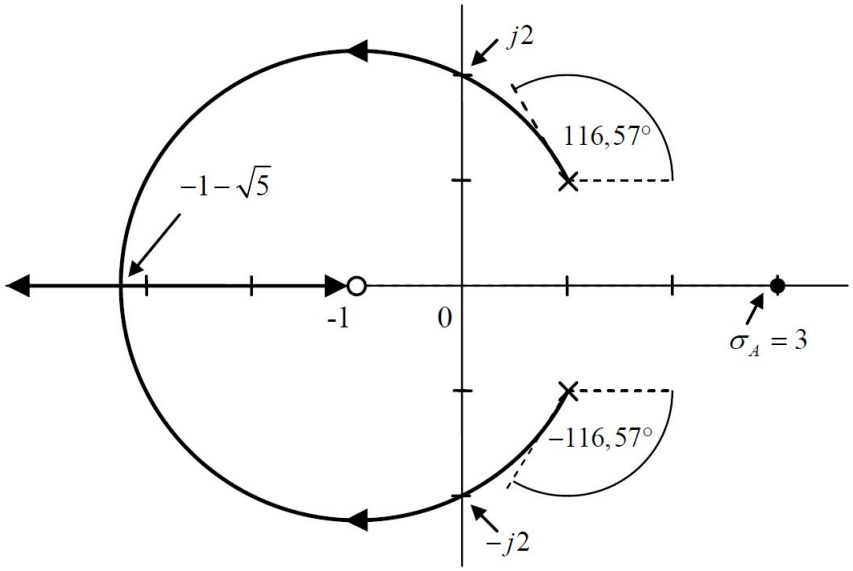
Finalmente, solo resta calcular el cruce por el eje imaginario del LGR, lo que se encuentra calculando la ganancia crítica. La ecuación característica se escribe como

$$\bar{q}(s) = 1 + KG(s) = 1 + K\frac{s+1}{s^2 - 2s + 2} = s^2 + (K-2)s + (2+K) = 0$$

Se construye la tabla de R-H:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 2+K \\ s & K-2 & 0 \\ 1 & 2+K & \end{array}$$

A partir de la tabla se obtiene la ganancia crítica $K_c = 2$. Reemplazando el valor de $K = K_c$ en $\bar{q}(s)$ y resolviendo la ecuación se obtienen los cruces por el eje imaginario en $s = \pm j2$. Con todo esta información es posible compljetar el gráfico del LGR como se muestra a continuación.



Valor de K para un cierto s del LGR

En el diseño de un sistema la pregunta final siempre es cuánto debe valer K para que el sistema se comporte de una cierta manera. Por ejemplo, en este caso:

- El sistema es inestable con $K \in [0, 2)$.
- El sistema es críticamente estable con $K = 2$, pues con $K = 2$ los polos del lazo la ecuación característica de lazo cerrado son $s = \pm j2 \rightarrow$ y generan respuesta oscilatoria de amplitud constante.
- El sistema es estrictamente estable con $K > 2$.
- El sistema es *estable* con $K \geq 2$. El caso *estable* incluye el *críticamente estable* y el *estríctamente estable*. En general cuando se habla de estabilizar un sistema, se busca hacerlo *estríctamente estable* y las personas dicen informalmente que el sistema es *estable*, cuando lo más riguroso sería refierse a que el sistema es *estríctamente estable*.

3. Considere el sistema realimentado de la figura:

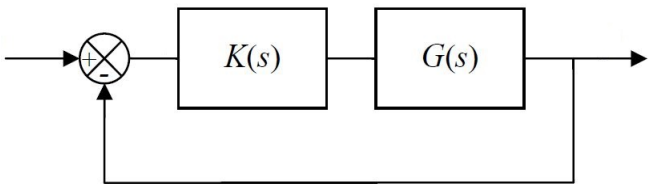


Figura 6: Sistema realimentado

Para el sistema se considera un controlador puramente proporcional $K(s) = K$. Trace el Lugar Geométrico de las Raíces y encuentre la ganancia crítica, si existe, en los siguientes casos:

(a)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

i. La ecuación caracteristica está dada por:

$$1 + K(s)G(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

ii. $F(s) = G(s)$

iii. No existen ceros, por lo que $m = 0$. Los polos son: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, por lo que $n = 3$.

iv. En el eje real existe LGR entre los polos p_0 y p_1 y hacia la izquierda del polo p_3.

v. El punto de inicio de las asíntotas es:

$$a_{\text{asíntota}} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - \sum_{i=0}^{0} z_i}{n - m} = \frac{(-1 - 2 - 0) - 0}{3} = -1$$

vi. Las asíntotas tienen ángulos (se calculan con k hasta $n - m = 3$, es decir para $k = 1, 2, 3$):

$$\phi_k^{\text{asin}} = \frac{2k-1}{n-m} 180^\circ = -60^\circ,\ 60^\circ,\ 180^\circ$$

vii. Los puntos de despegue o aterrizaje se calculan resolviendo:

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{G(s)}\right\} = -3s^2 - 6s - 2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} s_1 &= -0.4226 \\ s_2 &= -1.5 \end{aligned}$$

viii. El ángulo de salida del polo p_1 es:

$$\phi_1^{sal} = -\phi_2 - \phi_3 + 180^\circ = 0^\circ + 0^\circ + 180^\circ = 180^\circ$$

El ángulo de salida del polo p_2 es:

$$\phi_2^{sal} = -\phi_1 - \phi_3 + 180^\circ = -180^\circ - 0^\circ + 180^\circ = 0^\circ$$

El ángulo de salida del polo p_3 es:

$$\phi_3^{sal} = -\phi_1 - \phi_2 + 180^\circ = -180^\circ - 180^\circ + 180^\circ = -180^\circ$$

(2)

ix. Para obtener los cruces por eje imaginario se debe encontrar la ganancia crítica. Para esto se puede construir la tabla de R-H para la ecuación característica de lazo cerrado: $\bar{q}(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

s^3	1	2	0
s^2	3	K	0
s^1	$\frac{(3\cdot 2 - K)}{3}$	0	
s^0	$\frac{\frac{K(6-K)}{3}}{\frac{6-K}{3}}$		

$$\begin{aligned} K &> 0 \\ \frac{6-K}{3} &> 0 \\ \Rightarrow K &< 6 \end{aligned}$$

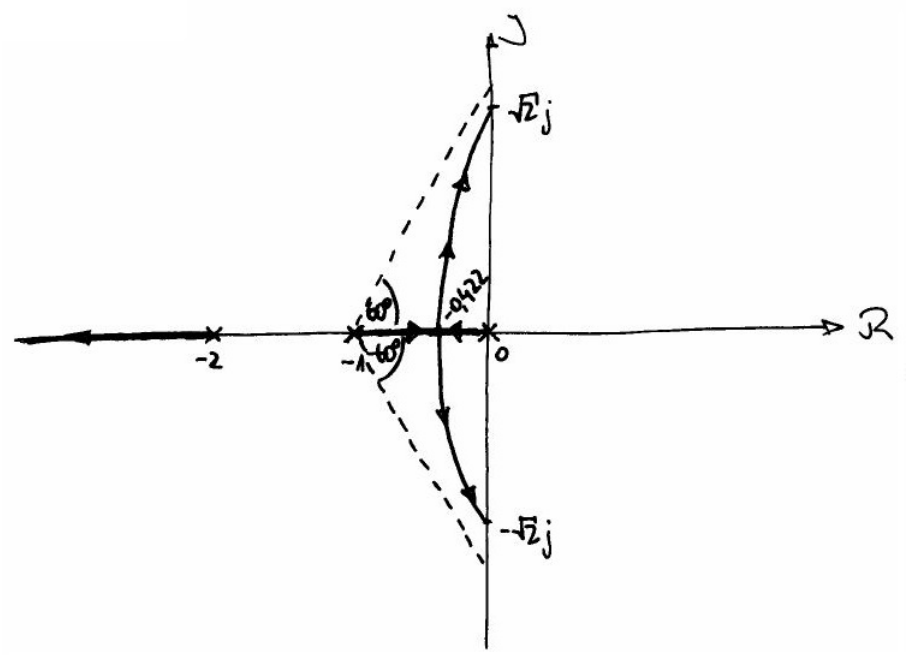
Usando $K = K_c = 6$ se obtiene la ecuación caracterísitca para el sistema realimentado con la ganancia crítica:

$$\bar{q}(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 6$$

la cual tiene raíces:

$$\begin{aligned} \bar{q}(s) = 0 \Rightarrow s_1 &= -3 \\ s_2 &= j\sqrt{2} \\ s_3 &= -j\sqrt{2} \end{aligned}$$

Finalmente el LGR queda como se muestra en la siguiente figura.



(b)

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

i. La ecuación caracteristica está dada por:

$$1 + K(s)G(s) = 1 + \frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

ii. Los ceros del sistema son $z_1 = -2$, luego $m = 1$. Los polos son: $p_1 = -1 + j$, $p_2 = -1 - j$, luego $n = 2$.

iii. Sobre el eje real hay LGR desde el cero z_1 a su izquierda.

iv. El punto de inicio de las asíntotas es:

$$a_{\text{asíntota}} = \frac{p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^{1} z_i}{n-m} = \frac{(-1+j)+(-1-j)-(-2)}{1} = 0$$

v. La asíntota tiene ángulo ($k = 1$):

$$\phi_k^{\text{asin}} = \frac{2k-1}{n-m}180^\circ = 180^\circ$$

vi. Los puntos de despegue o aterrizaje se calculan resolviendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{G(s)}\right\} = \frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} = 0 \Rightarrow s_1 &= -2+\sqrt{2} = 0.587 \\ s_2 &= -2-\sqrt{2} = -3.414 \end{aligned} \tag{3}$$

vii. El ángulo de salida del polo p_1 es:

$$\phi_1^{sal} = -\phi_2 + \psi_1 + 180^\circ = -90^\circ + 45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$

viii. El ángulo de salida del polo p_2 es:

$$\phi_2^{sal} = -\phi_1 + \psi_1 + 180^\circ = -(-90)^\circ + (-45)^\circ + 180^\circ = 225^\circ = -135^\circ$$

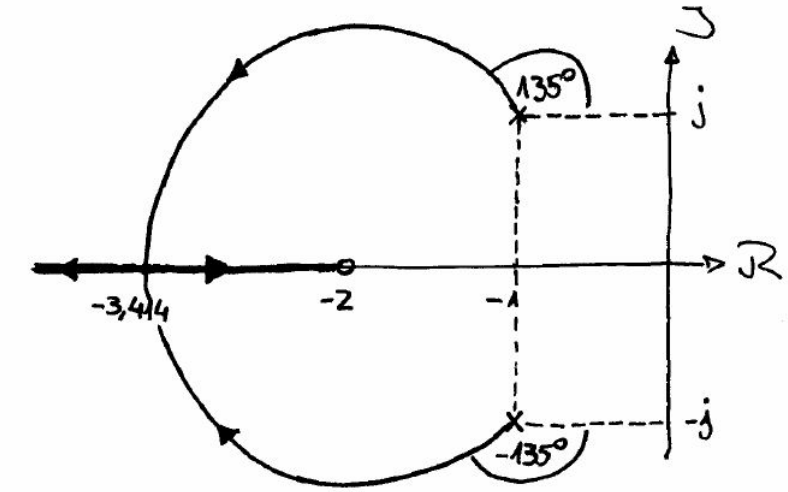
ix. El ángulo de llegada al cero z_1 es:

$$\psi_2^{lleg} = \phi_1 + \phi_2 - 180^\circ = -135^\circ + 135^\circ - 180^\circ = -180^\circ$$

x. Aplicando el criterio de R-H podemos encontrar los valores de la ganancia K que aseguran la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En este caso la ecuación característica de lazo cerrado está dada por $\bar{q}(s) = s^2 + (K+2)s + K + 2$ y la tabla de R-H es:

s^2	1	$K+2$
s^1	$K+2$	0
s^0	$\frac{(K+2)^2}{K+2}$	

Las condiciones para la estabilidad son ambas $K+2 > 0$, es decir $K > -2$. Por lo tanto, para cualquier $K > 0$ el sistema será estable. El sistema no tiene cruces por eje imaginario y el bosquejo del LGR queda como se muestra en la siguiente figura.



(c)

$$G(s) = \frac{s+3}{(s^3+11s^2+30s)(s^2+2s+2)}$$

i. La ecuación caracteristica está dada por:

$$q(s) = 1 + K(s)G(s) = 1 + \frac{K(s+3)}{(s^3+11s^2+30s)(s^2+2s+2)}$$

ii. $G(s) = \frac{(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$

iii. Existe solo un cero: $z_1 = -3$, luego $m = 1$. Los polos son: $p_1 = 0$, $p_2 = -5$, $p_3 = -6$, $p_4 = -1 - j$, , $p_5 = -1 + j$, y $n = 5$.

iv. Existe LGR sobre el eje real entre p_1 y z_1, entre p_2 y p_3.

v. El punto de inicio de las asíntotas es:

$$\begin{aligned} a_{\text{asíntota}} &= \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 - \sum_{i=1}^{1} z_i}{n-m} \\ &= \frac{0 + (-5) + (-6) + (-1+j) + (-1-j) - (-3)}{5-1} = -2.5 \end{aligned}$$

vi. Las asíntotas tiene ángulos (se calculan con k hasta $n-m=4$, es decir para $k=1,2,3,4$):

$$\phi_k^{\text{asin}} = \frac{2k-1}{n-m}180^\circ = 45^\circ, 135^\circ, -45^\circ, -135^\circ$$

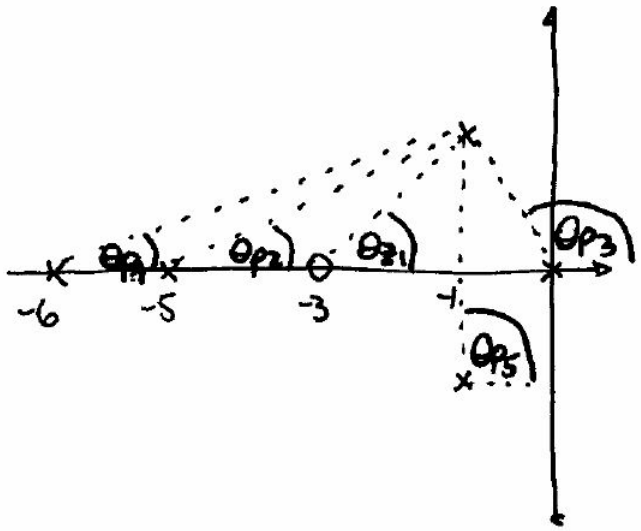
vii. Los puntos de despegue o aterrizaje se calculan resolviendo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{G(s)}\right\} &= \frac{d}{ds}\left\{\frac{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}{(s+3)}\right\} = 0\\ &= \frac{-2(2s^5+27s^4+132s^3+284s^2+246s+90)}{(s+3)^2} = 0\\ &\Rightarrow s = -5.525\end{aligned}$$

viii. No necesitamos calcular el ángulo de salida o llegada de polos y ceros sobre el eje real. Como hemos visto en los ejercicios anteriores, la salida desde polos o cero en el eje real está determinada por la existencia del LGR sobre el eje real. Sin embargo, interesan los polos complejeos conjugados p_4 y p_5. Por simetría basta calcular el ángulo de salida de uno de ellos:

$$\begin{aligned}\phi_4^{sal} &= -\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_5 + \psi_1 + 180^\circ\\ &= -\arctan(1/-1) - \arctan(1/4) - \arctan(1/5) - 90^\circ + \arctan(1/2)\\ &= -135^\circ - 14.04^\circ - 11.31^\circ - 90^\circ + 26.57^\circ + 180^\circ\\ &= -43.8^\circ\end{aligned}$$

El ángulo de salida ϕ_5^{sal} es el conjugado de ϕ_4^{sal}, es decir $\phi_5^{sal} = -\phi_4^{sal} = 43.8^\circ$.
Los ángulos en la aplicación de la fórmula anterior se obtienen gráficamente trazando los vectores que parten desde la ubicación de los polos y el cero hacia el polo p_4 como se muestra en el siguiente bosquejo.



ix. Aunque no es necesario calcular el ángulo de llegada al cero z_1 porque este debe ser 0° dada la ubicación del LGR sobre el eje real, lo calcularemos igualmente para mostrar el procedimiento:

$$\begin{aligned}\psi_1^{lleg} &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 - 180^\circ\\ &= 180^\circ + 0^\circ + 0^\circ + \phi_4 + (-\phi_4) \circ -180^\circ\\ &= 0^\circ\end{aligned}$$

x. Para encontrar los cruces del LGR por el eje imaginario se emplea el criterio de R-H para encontrar la ganancia crítica. La ecuación característica de lazo cerrado es:

$$\bar{q}(s) = s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60 + K)s + 3K$$

y la tabla de R-H correspondiente:

s^5	1	54	$60 + K$
s^4	13	82	$3K$
s^3	47.7	$0.769K$	0
s^2	$65.6 - 0.212K$	$3K$	0
s^1	$\frac{3940 - 105K - 0.163K^2}{65.6 - 0.212}$	0	0
s^0	$3K$	0	0

Debe cumplirse para la estabilidad que la primera columna tenga signos positivos en todas sus filas, es decir:

i.

$$\begin{aligned} 65.6 - 0.212K &> 0 \\ \Rightarrow K &< 309.43 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} 3940 - 105K - 0.163K^2 &> 0 \\ \Rightarrow K &< 35.56 \\ K &> -679.73 \end{aligned}$$

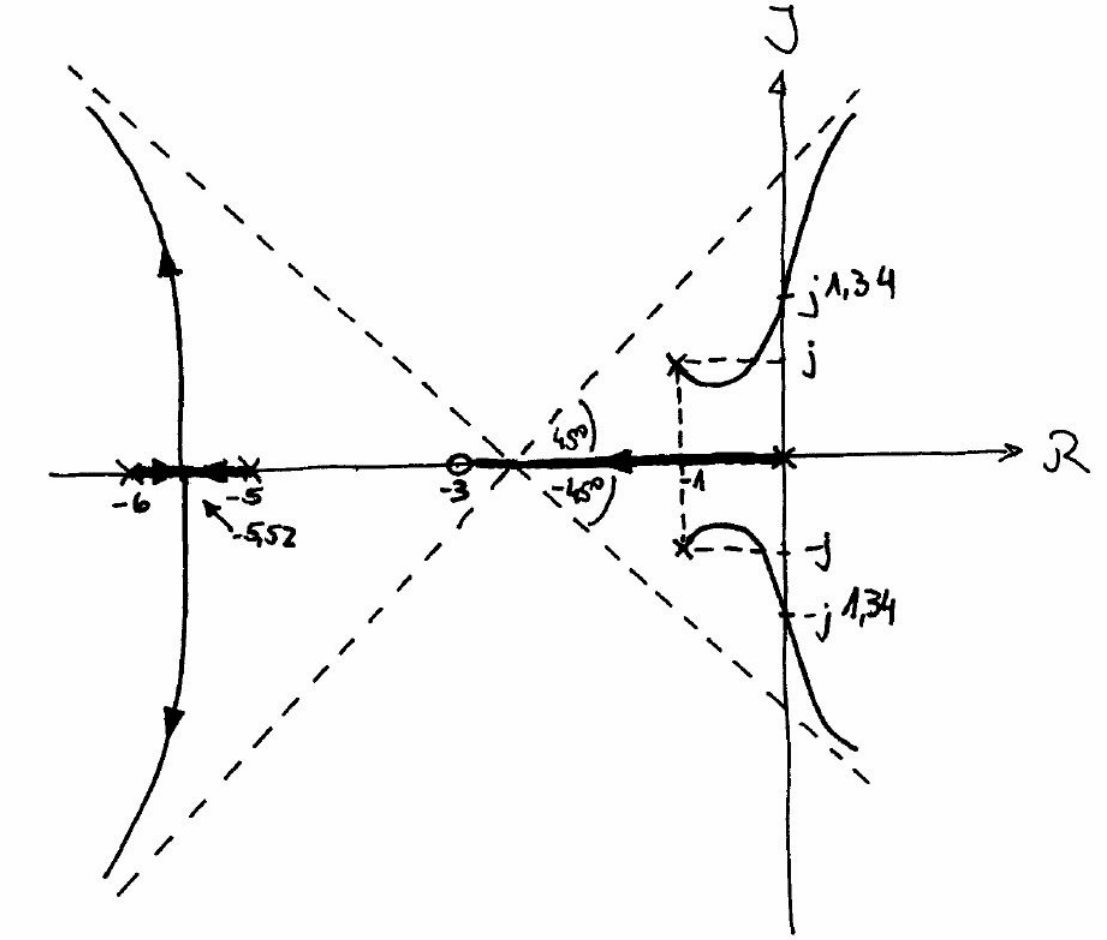
iii.

$$\begin{aligned} 3K &> 0 \\ \Rightarrow K &> 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $0 < K < 35.56$ y el LGR corta el eje imaginario para ganancias $K = 0$ y $K = 35.56$ Al usar $K = 35.56$, la fila de s^1 de la tabla de R-H se hace cero. Por lo tanto, se utiliza el polinomio auxiliar:

$$\begin{aligned} A(s) &= (65.6 - 0.212K)s^2 + 3K \\ &= 58.2s^2 + 105 \end{aligned}$$

cuyas raíces son $s_1 = j1.34$ y $s_2 = -j1.34$. Con esta información finalmente es posible bosquejar el LGR como se muestra a continuación.



4. Considere el sistema en lazo cerrado de la figura 7 en el cual el proceso está caracterizado por

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^4}$$

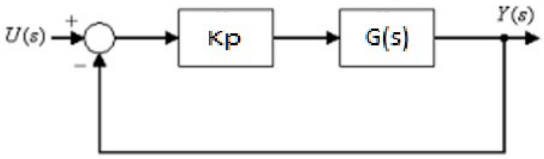


Figura 7: Sistema realimentado.

(a) Trace el Lugar de las Raíces del sistema en lazo cerrado al variar la ganancia K_p.
Solución:
La función de transferencia está dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} = \frac{\frac{K_p}{(s+1)^4}}{1 + \frac{K_p}{(s+1)^4}} = \frac{K_p}{(s+1)^4 + K_p}$$

Luego se procede aplicando los pasos para bosquejar el LGR.

i. La ecuación caracteristica está dada por:

$$\bar{q}(s) = 1 + K_p G(s) = 1 + \frac{K_p}{(s+1)^4} = (s+1)^4 + K_p$$

ii. La planta no tiene ceros ($m = 0$), pero tiene cuatro polos: $p_i = -1$, $i = 1, 2, 3, 4$ en el mismo lugar ($n = 4$).

iii. No existe LGR sobre el eje real, ya que los polos sobre eje real se ubican todos en el mismo lugar y el número es par.

iv. El punto de inicio de las asíntotas es:

$$a_{\text{asíntota}} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - \sum_{i=1}^{1} z_i}{n - m} = \frac{((-1) + (-1) + (-1) + (-1) - (\emptyset)}{4} = -1$$

v. Las asíntotas tiene ángulos (se calculan con k hasta $n - m = 4$, es decir para $k = 1, 2, 3, 4$):

$$\phi_k^{\text{asin}} = \frac{2k-1}{n-m} 180^\circ = 45^\circ, 135^\circ, -45^\circ, -135^\circ$$

vi. Los puntos de despegue o aterrizaje no se calculan en este caso, porque no existe LGR sobre el eje real. Los puntos de despegue corresponden a los mismos polos.

vii. El ángulo de salida del polo p_1, se calcula considerano su multiplicidad ($\lambda = 4$ porque está repetido 4 veces):

$$\begin{aligned}
\lambda\phi_k^{sal} &= -\sum_{i \neq k} \phi_i + \sum_{j=0} 0psi_j + 180^\circ + 360(k-1), \quad k = 1, 2, 3, 4. \\
&= -\{\emptyset\} + \{\emptyset\} + 180^\circ + 360(k-1) \\
&= 45^\circ + 90^\circ(k-1) \\
&= \{45^\circ, 135^\circ, -45^\circ, -135^\circ\}
\end{aligned}$$

Notar que los ánculos de salida coinciden con asíntotas. En este caso particular la traza del LGR y las asíntotas coinciden en forma exacta.

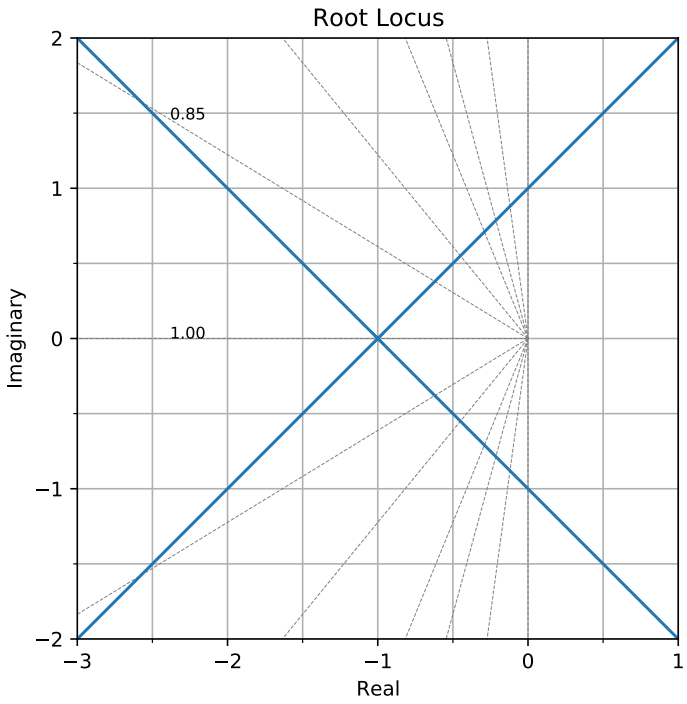
viii. Para encontrar el cruce por el eje imaginario se calcula la ganancia crítica K_c empleando el criterio de R-H. Dada la ecuación característica de lazo cerrado:

$$\bar{q}(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 + K_p$$

s^4	1	6	$1 + K_p$
s^3	4	4	0
s^2	5	$1 + K_p$	0
s^1	$16/5 - (4K_p/5)$	0	0
s^0	$1 + K_p$		

$$\frac{16}{5} - 4\frac{K_p}{5} > 0$$
$$\Rightarrow K < 4$$

Es sistema en lazo cerrado es estable para $K_p < 4$ y el LGR cruza el eje imaginario para $K_p = 4$. Al remplazar $K = 4$ en la tabla R-H. Esto hace cero la fila s^1, luego utilizando la fila anterior como ecuación auxiliar, es decir, $A(s) = 5s^2 + 5 = 0$, se obtienen los puntos de corte del eje imaginario $s_c = \pm j$. Observar que estos puntos también se encuentran en este caso particular intersectando las asíntotas con el eje imaginario porque el LGR sigue las asíntotas desde el inicio de los polos que en este caso coinciden en ubicación con el inicio de las asíntotas. Finalmente el bosquejo del LGR queda como se muestra en la siguiente gráfica:



(b) Analice la estabilidad del sistema realimentado en función de la ganancia K_p y determine la ganancia crítica K_c. Qué ocurre si $K_p = K_c$ y varía la referencia del controlador en forma de escalón?

Solución:
En el caso de utilizar $K_p = K_c = 4$ (K_c está calculado en la parte anterior) se obtiene el caso críticamente estable con polos puramente imaginarios conjugados, por lo que la respuesta al escalón oscilará infinitamente. Si bien hay dos raíces que tendran parte real negativa $s_1 = -2 + j$ 6 $s_2 = -2 - j$, las otras dos serán $s_3 = +j$ y $s_4 = -j$. Se tiene la superposición de 2 sinusoides de la misma frecuencia $\omega = 1$ rad/s, pero una de esas sinusoide decae de acuerdo a e^{-2t}, mientras que la otra no decae.

(c) Determine y grafique la respuesta del sistema realimentado ante un cambio en escalón unitario en la referencia, para $Kp = 0.25$.

Solución:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{K_p}{(s+1)^4}}{1+\frac{K_p}{(s+1)^4}} U(s) \\ &= \frac{\frac{K_p}{(s+1)^4}}{1+\frac{K_p}{(s+1)^4}} \frac{1}{s} \\ &= \frac{0.25}{(s+1)^4+0.25} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

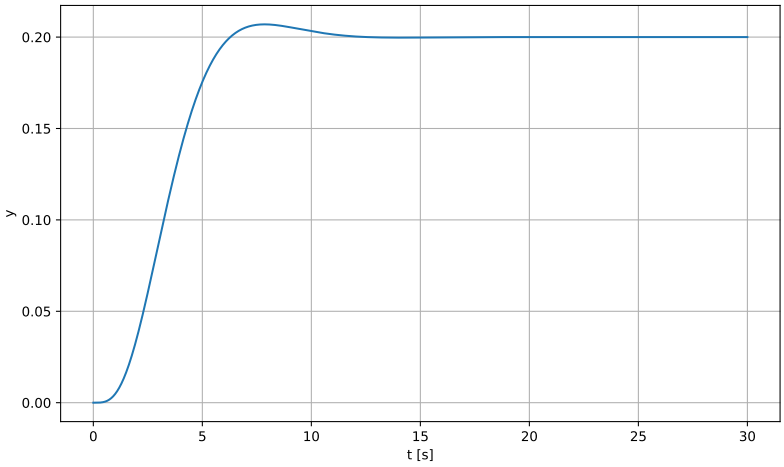
Mediante separación por fracciones parciales se obtiene que

$$\begin{aligned} Y(s) &= 0.25\left(\frac{4}{5s} - \frac{1}{0.5+s+s^2} - \frac{1}{5}\frac{(4s+7)}{2.5+2s+s^2}\right) \\ &= 0.25\left(\frac{4}{5s} - \frac{4}{(s+0.5)^2+\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}\frac{(4s+7)}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}\right) \end{aligned}$$

Se pueden separar en transformadas conocidas, lo que resulta en

$$y(t) = \frac{1}{5} - e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{4}{5}e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{12}{5}e^{-\frac{3}{2}t}sen\left(\frac{t}{4}\right)$$

La gráfica de la respuesta en el tiempo se muestra en la siguiente figura.



Por el teorema de valor final es posible obtener el valor del error en régimen permanente ante una entrada escalón en la referencia:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{(s+1)^4}{((s+1)^4+0.25)}\frac{1}{s} \\ e(\infty) &= \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0.8 \end{aligned}$$

El error de 0.8 es consistente con lo que se aprecia en la respuesta al escalón para el sistema en lazo cerrado, la cual converge a 0.2 y dando origen a un error de 0.8 con la referencia definida por el escalón unitario.

La gráfica del LGR muestra unas líneas segementadas que indican el grado de amortiguación del sistema. La línea horizonal (eje real) equivale a una amortiguación completa (sería como $\xi = 1$ en los sistemas de segundo orden), mientras que las líneas diagonales muestran otros números que van decreciendo a medida que se aproximan al eje imaginario (eje con $\xi = 0$). La interscción del LGR con las líneas de amortiguación entrega una idea de que tan subamortiguada puede ser la solución para una cierta ubicación de la raíces dada la ganancia fijada al controlador. Con $K_p = 0.25$, la amortiguación es equivalente a $\xi \approx 0.70$.

5. Una forma simplificada de la función de transferencia en lazo abierto de un avión con piloto automático en el sentido longitudinal es

$$K(s)G(s) = \frac{K(s+a)}{s(s-b)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Con $a, b > 0$. Trace el LGR si $a = b = 1$, $\xi = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 4$. Encuentre K para que la planta sea estable.

Solución:

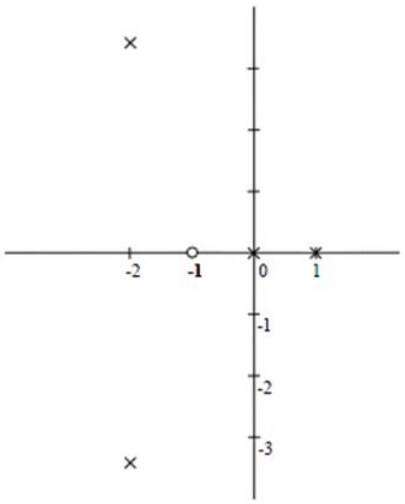
Siguiendo los pasos para desarrollar LGR

(i) Se obtiene la ecuación caracteristica de lazo cerrado:

$$\bar{q}(s) = 1 + K(s)G(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = 0$$

Observar que la ecuación ya se encuentra en la forma requerida $1 + KF(s)$ con $F(s) = G(s)$, por lo que no es necesario reordenar términos para aislar la ganancia o parámetro de interés.

(ii) El sistema tiene un cero $z_1 = -1$ y polos $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -2 + j2\sqrt{3}$ y $p_4 = -2 - j2\sqrt{3}$. Estos dos últimos se obtienen al resolver $s^2+4s+16 = 0$. El cero y los polos en el LGR se muestran en el siguiente diagrama.



(iii) Sobre el eje real el LGR se encuentra a la izquierda de un número impar de polos y ceros, luego tenemos un segmento en $[0, 1]$ y otro entre $[-\infty, -1]$.

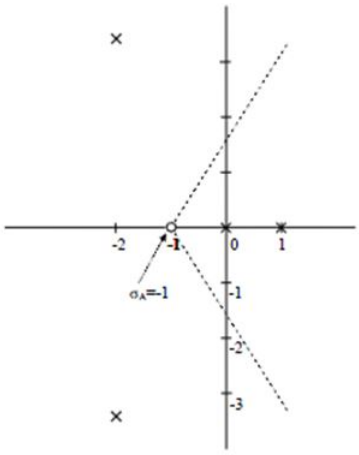
(iv) El punto de inicio de las asíntotas es:

$$a_{\text{asíntota}} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - z_1}{n-m} = \frac{(1 + 0 + (-2 + j2\sqrt{3}) + (-2 - j2\sqrt{3}) - (-1)}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

(v) Las asíntotas tienen ángulos (se calculan con k hasta $n - m = 3$, es decir para $k = 1, 2, 3$):

$$\phi_k^{\text{asin}} = \frac{2k-1}{n-m}180^\circ = -60^\circ,\ 60^\circ,\ 180^\circ$$

Las asíntotas se añaden al LGR como se muestra a continuación.



(vi) Los puntos de despegue o aterrizaje se calculan resolviendo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{G(s)}\right\} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{s+1}\right\} &= 0\\ \frac{3s^4+10s^3+21s^2+24s-16}{s^2+2s+1} &= 0\\ \Rightarrow\quad s_1 &= -2.26\\ s_2 &= 0.45\end{aligned}$$

En este caso es necesario resolver la ecuación numéricamente para encontrar las soluciones sobre el eje real. Dado que el LGR se encuentra a la izquierda del punto $s=-1$ y entre el punto $s=0$ y el punto $s=1$, la solución $s_1=-2.26$ será el punto de aterrizaje del LGR proveniente del par de polos complejos, y la solución $s_2=0.45$ será el punto de despegue del LGR proveniente de los polos reales.

(vii) El ángulo de llegada al cero z_1 es:

$$\begin{aligned}\psi_1^{lleg} &= \phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4-\sum_{i=0}^{0}\psi_i-180^\circ\\ &= 180^\circ+180^\circ+\phi_3+(-\phi_3)-\{\emptyset\}-180^\circ\\ &= -180^\circ\end{aligned}$$

Para los polos p_1 y p_2 que se encuentran sobre el LGR también es posible calcular los ángulos de salida, pero debido que el LGR entre estos dos polos se encuentra sobre el eje real, entonces $\phi_1^{sal}=180^\circ$ y $\phi_2^{sal}=0^\circ$.

El ángulo de salida del los polos complejos conjugados p_3 y p_4 es más complicado de calcular. Es necesario trazar los vectores a uno de estos desde el cero y los polos restantes y calcular los ángulos como se muestra en la siguiente figura.

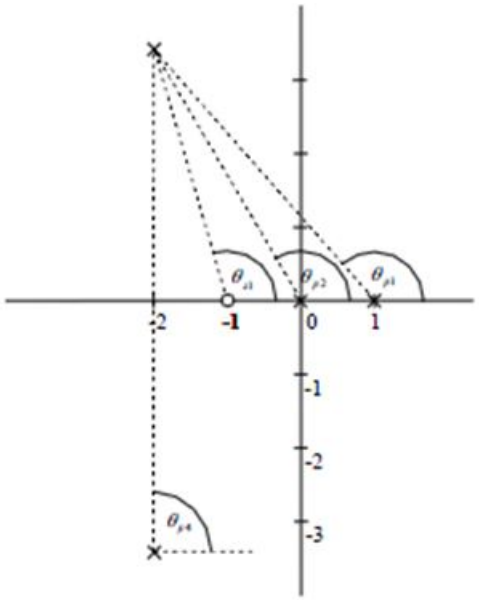


Figura 8: Angulos ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, y ϕ_4 (de derecha a izquierda) conectando los polos $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, el cero $z_1 = -1$ y el polo $p_4 = -2 - j2\sqrt{3}$ con el polo $p_3 = -2 + j2\sqrt{3}$.

Empleando los ángulos que se calculan por trigonometría básica:

$$\begin{aligned}\phi_3^{sal} &= -\phi_1 - \phi_2 - \phi_4 + \psi_1 + 180^\circ \\ &= -\arctan(2\sqrt{3}/-3) - \arctan(2\sqrt{3}/-2) - 90^\circ + \arctan(2\sqrt{3}/-1) + 180^\circ \\ &= -130.89^\circ - 120^\circ - 90^\circ + 106.10^\circ + 180^\circ \\ &= -54.79^\circ\end{aligned}$$

El ángulo de salida del polo p_4 es el conjugado del ángulo de salida del polo p_3 para mantener la simetría con respecto al eje real, es decir: $\phi_4^{sal} = -\phi_3^{sal} = 54.79^\circ$.

(viii) Para obtener los cruces por eje imaginario se debe encontrar la ganancia crítica. Para esto se puede construir la tabla de R-H para la ecuación característica de lazo cerrado:

$$\bar{q}(s) = s(s-1)(s^2+4s+16) + K(s+1) = s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K-16)s + K = 0$$

La tabla de R-H en este caso será:

s^4	1	12	K
s^3	3	$K-16$	0
s^2	$(52-K)/3$	K	0
s^1	$(K^2-59K+832)/(K-52)$	0	
s^0	K		

Del arreglo, se concluye que $K > 0$ y $K < 52$ de manera inmediata. Ahora, también se debe tener que

$$\frac{K^2 - 59K + 832}{K - 52} > 0$$

Como el denominador de la expresión anterior es negativo según las otras condiciones, basta considerar que el numerador debe ser negativo. Las raíces del sistema son

$$K = \frac{59 \pm 3\sqrt{17}}{2} = \{23.32, 35.68\}$$

Es posible observar que para valores de $23.32 < K < 35.68$ el término $K^2 - 59K + 832$ tiene un valor negativo. Por lo tanto, el sistema tiene ganancias críticas $K_{c1} = 23.32$ y $K_{c2} = 35.68$. Esto implica que existen 2 itersecciones con el eje imaginario. Reemplazando el primer valor de la ganacia crítica en la tabla, tenemos que la cuarta fila se hace cero, por lo que podemos recurrir a la ecuación auiliar $A(s)$, dada por:

$$A(s) = \frac{15 + \sqrt{17}}{2} s^2 + \frac{59 - 3\sqrt{17}}{2},$$

cuyas raíces corresponden a los cruces por el eje imaginario en $s = \pm j1.56$. Para el segundo valor de la ganacia crítica, $A(s)$ será:

$$A(s) = \frac{15 - \sqrt{17}}{2} s^2 + \frac{59 + 3\sqrt{17}}{2}$$

cuyas raíces corresponden a los cruces por el eje imaginario en $s = \pm j2.56$.

Considerando todos los aspectos anteriores, el LGR para este caso quedará como se muestra en la figura 9.

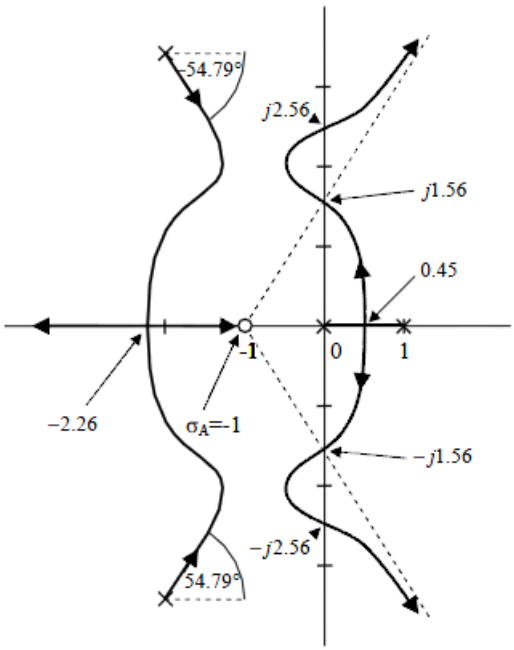


Figura 9: LGR para un avión con piloto automático para la dinánmica longitudinal-altitud.