Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 6

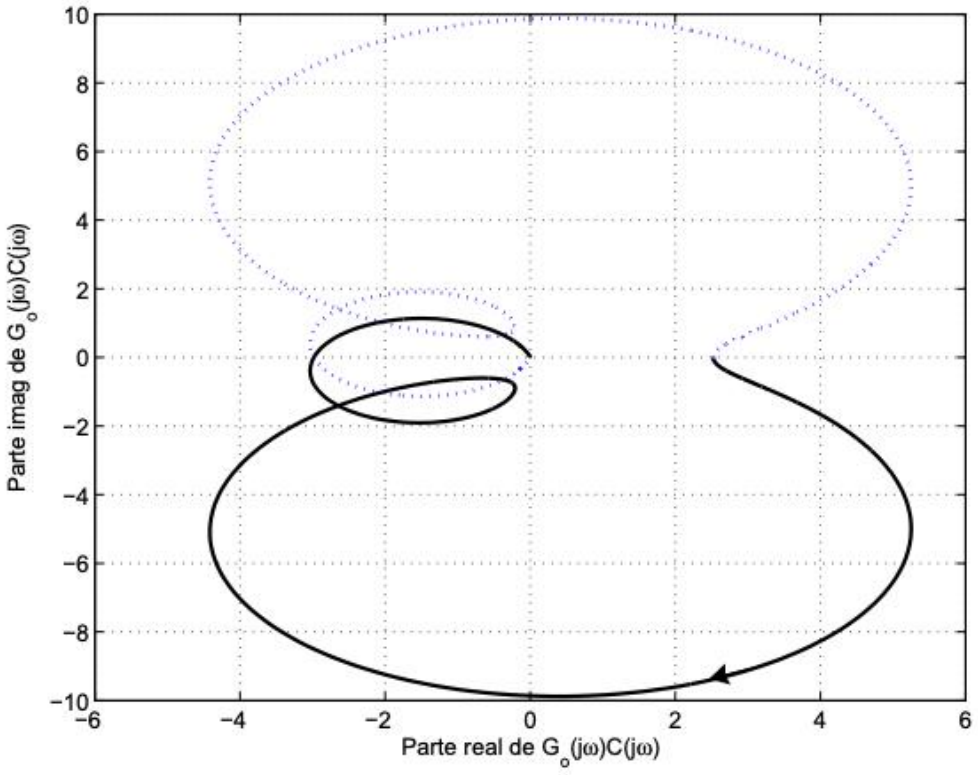
Nyquist y Estabilidad

11 de Octubre 2024

Martín Valencia - martin.valencia@uc.cl

Problema 1

Considere el siguiente diagrama de Nyquist de $G_o(s)C(s)$ (Asuma que no tiene polos en el semiplano derecho):



1. ¿Es el lazo cerrado estable?

Solución:

Del diagrama se observa que el punto $(-1, 0)$ se encierra dos veces en santido horario, por lo que $N = 2$. Luego, como se nos dice que el lazo abierto no tiene polos en el semipolano derecho, $P = 0$. Así, por el teorema de Nyquist:

$$N = Z - P \tag{1}$$
$$2 = Z - 0 \tag{2}$$
$$Z = 2 \tag{3}$$

Como $Z = 2$, el lazo cerrado no es estable.

2. Estime, a partir del gráfico, la ganancia que haría que los polos dominantes del lazo cerrado estuviesen en el eje imaginario

Solución:

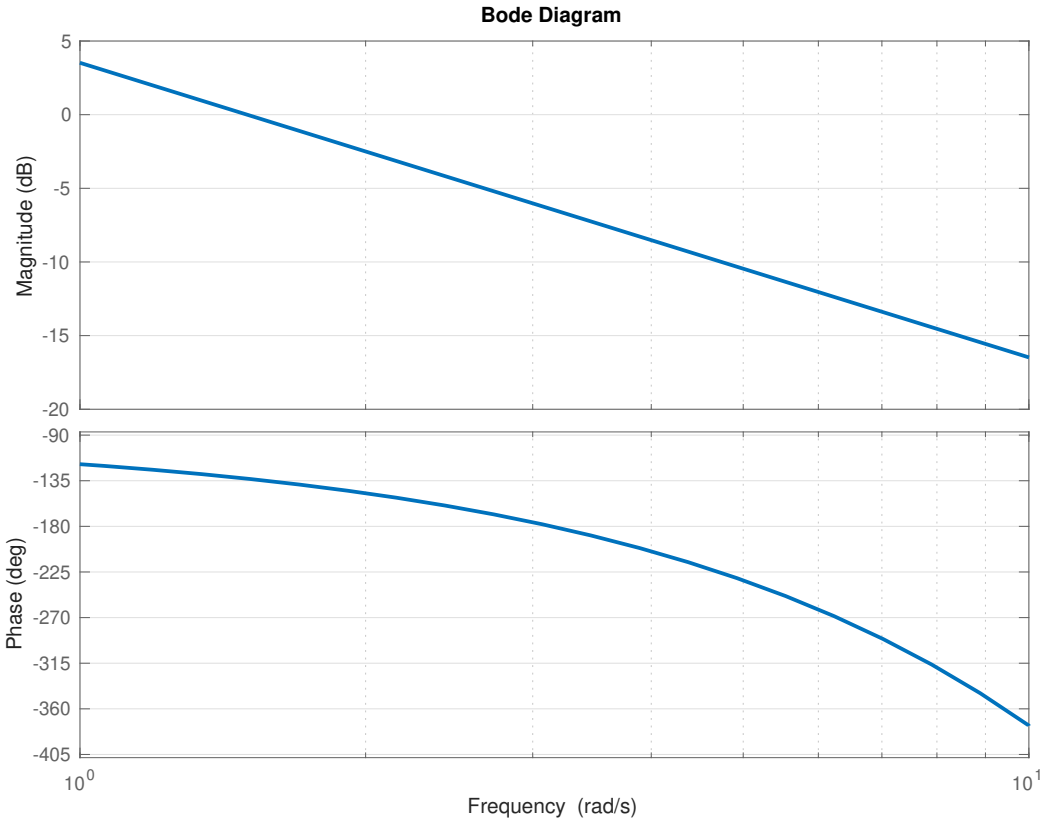
Lo pedido es equivalente a que el diagrama de Nyquist pase justo por encima de $(-1, 0)$. Esto se obtiene cuando la ganancia es multiplicada por $\frac{1}{3}$ aproximadamente.

Pregunta 2

En un lazo de control estándar de un grado de libertad, sin cancelaciones inestables, la transferencia de lazo abierto es

$$G_o(s)C(s) = K\frac{e^{-0.5s}}{s}$$

y cuyo diagrama de Bode está dado por:



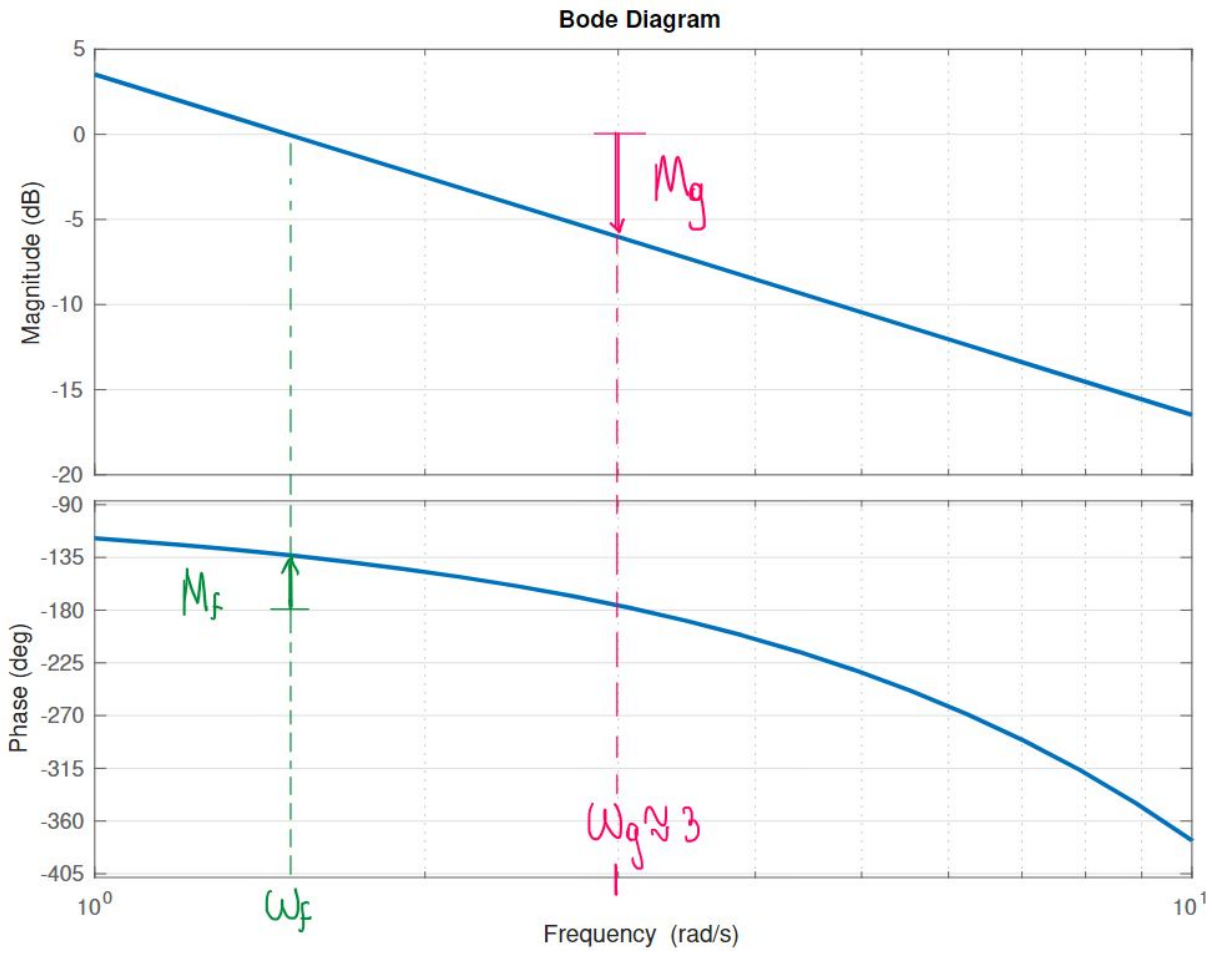
Determine para qué rango de valores de K el lazo cerrado es estable. ¿Cuál es el margen de fase?

Solución:

La ganancia del sistema está dada por:

$$|G_o(j\omega)C(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$$

La ganancia crítica se puede obtener a partir del margen de ganancia. Para determinarlo, usamos Bode para aproximar la frecuencia donde la fase es $-180°$, que es $\omega_g \approx 3$:



Así:

$$|G_o(j\omega)C(j\omega)| = \frac{K_{crtico}}{3} < 1 \rightarrow K_{crtico} < 3$$

Luego, el margen de fase se obtiene a partir del Bode al mirar la frecuencia en que la ganancia es unitaria (0 dB). Del gráfico se puede llegar a que $M_f \approx 45°$.

Pregunta 3

En un lazo de control estándar de un grado de libertad, sin cancelaciones inestables, la transferencia de lazo abierto es

$$G_o(s)C(s) = \frac{0.5}{s(s+1)^2}$$

Además, se sabe que el modelo de calibración está dado por

$$G(s) = e^{-s\tau}G_o(s)$$

Use el teorema de estabilidad robusta para estimar un valor crítico para τ que asegure estabilidad del lazo "real".

Solución:

El "lazo real" va a serestable siempre y cuando se cumpla que:

$$|T_o(j\omega)||G_\Delta(j\omega)| < 1 \quad \forall\ \omega$$

Primeramente se obtiene $T_o(s)$:

$$T_o(s) = \frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{0.5}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5}$$

Luego, el error de modelado $G_\Delta(s)$:

$$G_\Delta = \frac{G(s) - G_o(s)}{G_o(s)} = \frac{e^{-s\tau}G_o(s) - G_o(s)}{G_o(s)} = e^{-s\tau} - 1$$

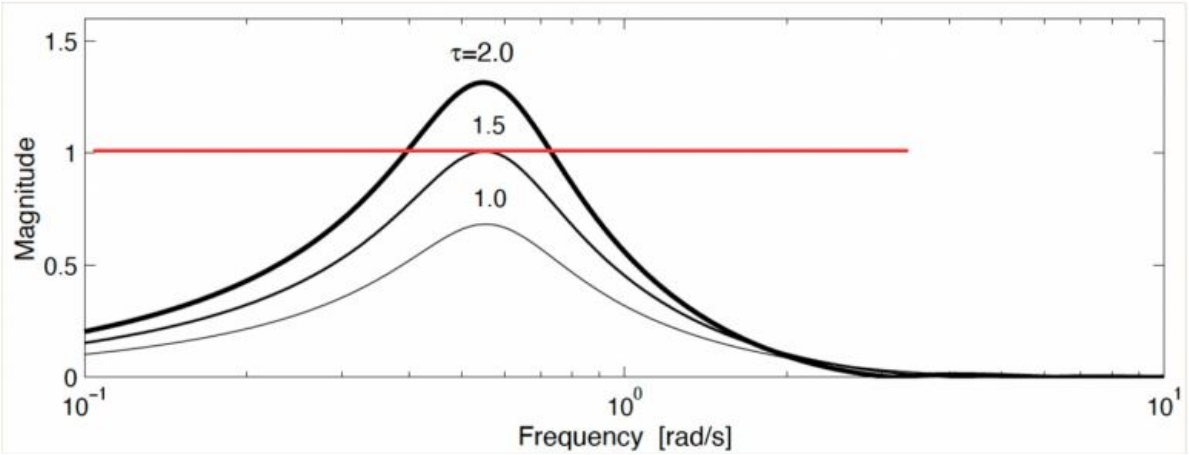
Esta última expresión al tratarse de una exponencial compleja, puede ser trabajada para obtener su modulo:

$$\begin{aligned}
|G_\Delta(j\omega)| &= |e^{-j\omega\tau} - 1| && (4)\\
&= \sqrt{(\cos(\omega\tau) - 1)^2 + \sin(\omega\tau)^2} && (5)\\
&= \sqrt{2(1 - \cos(\omega\tau))} && (6)\\
&= \sqrt{4}\sqrt{\frac{1 - \cos(\omega\tau)}{2}} && (7)\\
&= 2|\sin(\omega\tau/2)| && (8)
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición de estabilidad robusta es la siguiente:

$$2\left|\frac{0.5}{(j\omega)^2 + 2(j\omega)^2 + (j\omega) + 0.5}\right| |\sin(\omega\tau/2)| < 1 \quad \forall\ \omega$$

Graficamos el Bode para distintos valores de τ:



Del gráfico, para $\tau \leq 1.5$ se logra estabilidad robusta.