Capítulo 5 – Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

Miguel Torres Torriti

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

IEE2613 Control Automático

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Ventajas y Desventajas del Criterio RH

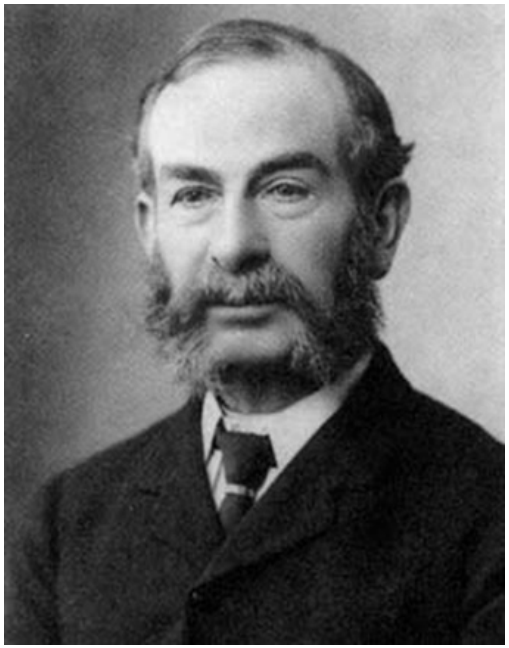
- Ventajas:
  - ¡Permite determinar la estabilidad del sistema sin necesidad de encontrar los valores de las raíces $\bar{\lambda}_i(K)$ de la ecuación característica $\bar{q}(s)$! Algo especialmente útil si el sistema es de orden mayor a 2.
  - Permite establecer algebraicamente rangos de ganancias para los cuales el sistema retro-alimentado se mantiene estable.
- Desventajas:
  - No puede aplicarse a sistemas discretos. Para sistemas discretos existe un método similar que se llama criterio de Jury, pero que involucra una tabla complicada de calcular por lo que en general no se utiliza.
  - No puede aplicarse a sistemas con retardos a menos que se aproxime el retardo, por ejemplo utilizando una aproximación de Padé. Para sistemas con retardos es preferible utilizar los métodos en frecuencia de Nyquist, Bode o Nichols.

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Observaciones sobre el Criterio RH

- Este método fue propuesto independientemente por Routh (1874) y Hurwitz (1895).
- Hoy en día existen herramientas computacionales para encontrar el valor de las raíces mediante métodos numéricos. Sin embargo, la segunda ventaja hace de este método muy útil.
- El método puede aplicarse para analizar los efectos de la variación de otras ganancias o parámetros del sistema sobre su estabilidad y no solamente los efectos de las ganancias del controlador.
- No use este método para analizar la estabilidad de sistemas discretos. Aunque esto está escrito aquí siempre hay algunos alumnos que lo usan en las pruebas. . . y está claro que no estudiaron.
- Si el sistema tiene un retardo, tampoco es recomendable usar este método, a menos que explícitamente le estén diciendo que realice una aproximación de Padé del retardo. Para sistemas con retardo, es posible obtener respuestas exactas usando los métodos de Nyquist, Bode o Nichols que se verán más adelante en el curso.

Edward Routh & Adolf Hurwitz



Edward John Routh
January 20 1831,
Quebec, Canada
7 June 1907 –
Cambridge, England



Adolf Hurwitz
March 26 1859, Hildeshein
Kingdom of Hannover, Germany
18 November 1919 –
Zürich, Switzerland

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Para un sistema con ecuación característica:

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Interesa saber si alguna raíz yace en $\mathbb{C}_+$ (el semiplano derecho).
Para la estabilidad se requiere:

a) Los coeficientes de $q(s)$ deben tener igual signo.
b) Los coeficientes de $q(s)$ deben ser distintos de cero.

Las condiciones anteriores son necesarias **necesarias** pero no suficientes.
Esto se observa si uno considera la expansión de la forma factorizada de $q(s)$:

$$q(s) = a_n (s - r_1)(s - r_2) \ldots (s - r_{n-1})(s - r_n)$$

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Expandiendo:

$$\begin{aligned} q(s) =& a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)s^{n-1} \\ &+ a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + \dots)s^{n-2} \\ &- a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots)s^{n-3} \\ &+ \cdots + (-1)^n a_n(r_1 r_2 r_3 r_4 \dots r_{n-1} r_n) = 0 \end{aligned}$$

De aquí se desprende que los coeficientes tendrán el mismo signo si:

$$r_i < 0, \ \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Sin embargo, esta condición no es suficiente, ya que todos los coeficientes pueden tener el mismo signo aún cuando algunas raíces son positivas, como demuestra el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} q(s) &= (s+2)(s^2 - s + 4) = 0 \\ &= (s+2)\left(s - \frac{1 + j\sqrt{15}}{2}\right)\left(s - \frac{1 - j\sqrt{15}}{2}\right) = 0 \\ &= s^3 + s^2 + 2s + 8 = 0 \end{aligned}$$

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El criterio de R-H entrega condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad.

Pasos del método de R-H:

1. Construir la Tabla R-H:

$\gamma_{k,j}$	$k\backslash j$	1	2	3	4	
s^n	0	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\cdots$
s^{n-1}	1	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\cdots$
s^{n-2}	2	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	$\cdots$	
s^{n-3}	3	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$s^{n-(k-2)}$	$k-2$	$\gamma_{k-2,1}$	$\gamma_{k-2,2}$	$\gamma_{k-2,3}$	$\cdots$	
$s^{n-(k-1)}$	$k-1$	$\gamma_{k-1,1}$	$\gamma_{k-1,2}$	$\gamma_{k-1,3}$	$\cdots$	
s^{n-k}	k	$\gamma_{k,1}$	$\gamma_{k,2}$	$\gamma_{k,3}$	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
s^1	$n-1$	d_1				
s^0	n	e_0				

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-4} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-6} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-5} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}$$

Término general de la Tabla R-H: $\gamma_{k,j} = \frac{-1}{} \begin{vmatrix} \gamma_{k-2,1} & \gamma_{k-2,j+1} \end{vmatrix}$

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

2. Verificar que no hayan cambios de signo en los elementos de la primera columna de la tabla R-H.

Criterio de R-H (Resultado):

El número de raíces de $q(s)$ con parte real positiva es igual al número de veces que ocurre un cambio de signo en la primera columna de la tabla R-H.
Nota: Recuerde que $(+ - +)$ representa 2 cambios de signo.

Casos especiales:

a) Si un elemento en la primera columna es cero, reemplácelo por $\epsilon > 0$, reconstruya la tabla R-H y aplique el criterio de R-H con $\epsilon \to 0$.
b) Si una fila entera de la tabla R-H es cero, entonces el sistema asociado a $q(s)$ no es estable.

Ejemplos - R-H

Ejemplo 1: Sistema de 2° orden:

$$q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_0 & 0 \end{array} \qquad b_0 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

Es decir, un sistema de 2° orden es estable si todos los coeficientes de la ecuación característica son de igual signo.

Ejemplos - R-H

Ejemplo 2: Sistema de 3er orden:

$$q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \;\rightarrow\; \begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_0 & 0 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{-1}{a_2}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_2} \qquad c_0 = \frac{-1}{b_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

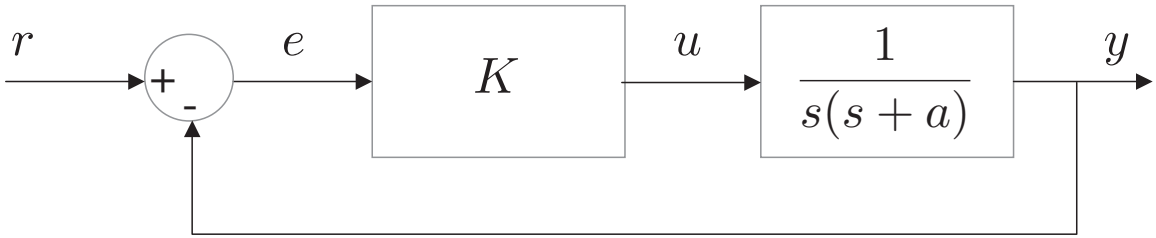
Aquí se tienen 2 casos:

- $a_i > 0,\ \forall i$. Se necesita que $b_1 > 0$, por tanto $a_1 a_2 > a_0 a_3$.
- $a_i < 0,\ \forall i$. Se necesita que $b_1 < 0$, por tanto $a_1 a_2 > a_0 a_3$

En ambos casos el criterio asociado a la variable b_1 queda de la misma forma.

Ejemplos - R-H

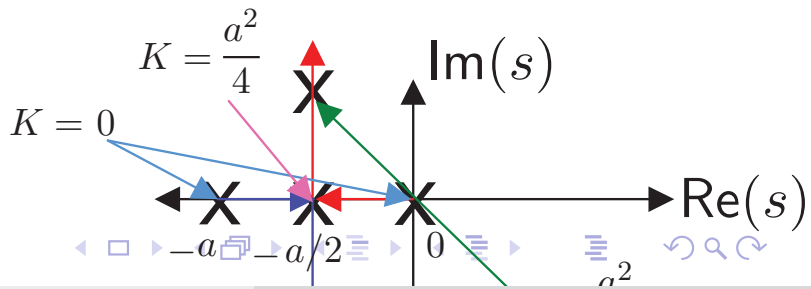
Ejemplo 3: Planta de 2° orden realimentada.



$$q(s) = s^2 + as + K = 0 \rightarrow \begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K \\ s^1 & a & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Para la estabilidad se requiere que $a > 0$. Esto concuerda con lo esperado si observamos las raíces de la ecuación característica:

$$s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4K}}{2}$$



Ejemplos - R-H

Ejemplo 4: Cohete: $q(s) = s^3 + 0.73s^2 + 0.078s + K = 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0.078 \\ s^2 & 0.73 & K \\ s^1 & 0.078 - K/0.73 & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

El sistema será estable:

$$0.078 - K/0.73 > 0 \qquad \wedge \qquad K > 0$$

Es decir si:

$$K < 0.078 \cdot 0.73 \qquad \wedge \qquad K > 0$$

Por lo que es estable en el rango $K \in (0,\ 0.057)$.

Ejemplos - R-H

Ejemplo 5: Existencia de ceros en la primera columna:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	0	6	0
s^2	c_2	10	0
s^1	d_1	0	0
s^0	10	0	0

Truco: El 0 en la primera columna se reemplaza por un elemento infinitesimal ϵ, de igual signo, por lo tanto:

$$c_2 = \frac{4\epsilon - 12}{\epsilon} = 4 - \frac{12}{\epsilon} \quad \wedge \quad d_1 = \frac{6c_2 - 10\epsilon}{c_2} = 6 - 10\frac{\epsilon^2}{4\epsilon - 12}$$

aplicando límite cuando $\epsilon \to 0$:

$$c_2 = -\infty \quad \wedge \quad d_1 = 6$$

Hay 2 cambios de signo, por lo tanto existen 2 raíces con parte real positiva.

Ejemplos - R-H

Ejemplo 6: No cancele polos y ceros, epecialmente aquellos en $\mathbb{C}_+$:

$$F_1(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2(s-1)} \quad \stackrel{?}{=} \quad F_2(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$q_1(s) = s^3 + 3s^2 - 4 \quad \neq \quad q_2(s) = s^2 + 4s + 4$$

q_1		
s^3	1	0
s^2	3	-4
s^1	$\frac{4}{3}$	
s^0	-4	

q_2		
s^2	1	4
s^1	4	
s^0	4	

Hay q_1 tiene un cambio de signo, por lo tanto existe 1 raíz con parte real positiva, mientras que q_2 no tiene cambios de signo, por lo tanto, no tendría raíces con parte real positiva. Téoricamente $F_1(s)$ es estable si se cancelan en forma exacta el polo y cero como en $F_2(s)$, en la práctica la cancelación exacta no existe, por lo tanto, no cancele polos y cero, sobretodo los inestables.

Referencias adicionales

- G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems.* 4^a ed. (1^a ed. 1986), Prentice Hall, 2002.
- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, M.E. Salgado. *Control System Design.* Prentice Hall, 2001.
- E.J. Routh. *The elementary part of a treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies.* Macmillan, London, 1905.