Tema: Sistemas de control realimentado

◁ *Guía de Ejercicios # 12* ▷

1. La ecuación de un motor DC puede escribirse como:

$$J_m\ddot{\theta}_m + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)\dot{\theta}_m = \frac{K_t}{R_a}V_a$$

con

$$\begin{aligned} J_m &= 0.01\ kg\,m^2 \\ b &= 0.001\ N\,m\,s \\ K_e &= 0.02\ V\,s \\ K_t &= 0.02\ N\,m/A \\ R_a &= 10\ \Omega \end{aligned}$$

Suponga que se añade retroalimentación de posición de modo que el motor funcione como un dispositivo de servo-posicionamiento con un voltaje aplicado dado por:

$$V_a = K(\theta_r - \theta_m)$$

donde K es la ganancia de retroalimentación, θ_r es la posición angular de referencia y θ_m es la posición angular medida.

(a) ¿Cuál es el máximo valor de K que puede emplearse para asegurar que la sobreoscilación M_p no supere el 10% ?

Reemplazando los valores numéricos, nos queda que el sistema ésta descrito por:

$$\ddot{\theta}_m + 0.104\dot{\theta}_m = 0.2V_a \Rightarrow F(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{0.2}{s^2 + 0.104s}$$

Así, el sistema en lazo cerrado se transforma en

$$G(s) = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)} = \frac{0.2K}{s^2 + 0.104s + 0.2K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Igualando, se obtiene que $\omega_n = \sqrt{0.2K}$ y $\xi = 0.052/\sqrt{0.2K}$.
Luego, la sobreoscilación se calcula mediante:

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \leftrightarrow \xi = \frac{-ln(M_p)}{ln(M_p)^2 + \pi^2}$$

Con $M_p = 0.1$ se obtiene $\xi = 0.59115$ y así $K = 0.03868$.

(b) ¿Qué valor de K garantiza un tiempo de respuesta menor a 1 segundo? Ignore la restricción sobre M_p del punto a.

Primero obtenemos una expresión para el tiempo de respuesta. Consideramos la respuesta en tiempo de una planta de segundo orden, se tiene:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta)$$

siendo $\alpha = -\xi\omega_n$ $\beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ y $\phi = \arctan(\sqrt{1-\xi^2}/\xi)$. Así, el tiempo de respuesta viene dado por la solución de $y(t_r) = 1$.

$$\begin{aligned}
y(t_r) &= 1 \\
1 - \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\xi\omega_n t_r} \sin(\beta t_r + \phi) &= 1 \\
\frac{\omega_n}{\beta} e^{-\xi\omega_n t_r} \sin(\beta t_r + \phi) &= 0 \\
\sin(\beta t_r + \phi) &= 0 \\
\beta t_r + \phi &= \pi \\
t_r &= \frac{\pi - \phi}{\beta} \\
t_r &= \frac{\pi - \arctan\left(\sqrt{1-\xi^2}/\xi\right)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}
\end{aligned}$$

Reemplazando y resolviendo numéricamente se llega a:

$$\begin{aligned}
t_r = \frac{\pi - \arctan(8.60026\sqrt{K - 0.01352})}{0.44721\sqrt{K - 0.01352}} &\leq 1 \\
\Rightarrow K &= 12.8653
\end{aligned}$$

(c) ¿Cuál será el valor de coeficiente de amortiguación en el caso anterior?

$$\xi = \frac{0.052}{\sqrt{0.2K}} = 0.03241$$

2. Para la planta representada por la función de transferencia de lazo abierto:

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + 4s}$$

Determine el rango de valores de la ganancia proporcional K para que el sistema en lazo cerrado tenga una sobreoscilación menor al 10% y esta ocurra antes de los 9 segundos.

¿Encuentra algún compromiso entre estos dos parámetros que describen parte la respuesta dinámica de la planta? Comente.

Solución

La función de transferencia de la planta en lazo cerrado es:

$$H(S) = \frac{F(s)}{1 + KF(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s + 3K} = \alpha\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Igualando los términos del polinomio cuadratico:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{3K} \\ 2\xi\omega_n &= 4 \\ \Rightarrow \xi &= \frac{2}{\sqrt{3K}} \end{aligned}$$

Sabemos que la sobreoscilación se calcula mediante:

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

Como el sistema esta escalado por α, Mp representa la sobreoscilación porcentual del sistema. Por enunciado nos piden que esta sea menor al 10 %, calculamos para el caso limite y luego establecemos el signo de la desigualidad:

$$\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2}{\sqrt{3K(1-4/(3K))}} = \frac{2}{\sqrt{3K-4}}$$

Remplazando

$$\begin{aligned} M_p &= e^{-2\pi/\sqrt{3K-4}} \\ ln(M_p) &= -\frac{2\pi}{\sqrt{3K-4}} \\ \sqrt{3K-4} &= -\frac{2\pi}{ln(M_p)} \\ 3K-4 &= \left(\frac{2\pi}{ln(M_p)}\right)^2 \\ K &= \frac{\left(\left(\frac{2\pi}{ln(M_p)}\right)^2+4\right)}{3} \\ K &= 3.81536 \end{aligned}$$

Si analizamos la expresión de M_p en función de K podemos ver que M_p crece si K crece, por lo que $K < 3.81536$. Calculemos ahora el tiempo de overshoot. Por definición, este se encuentra determinado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\beta}$$

con:

$$\beta = \sqrt{1-\xi^2}$$

Esta expresión sale de la solución de:

$$\frac{d}{dt}h(t) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 0$$

Podemos darnos cuenta, que como la transformada de Laplace es lineal, el escalamiento α no afecta el tiempo de overshoot. Calculamos para el caso limite y luego determinamos el signo de la desigualdad:

$$\beta = \sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-\frac{4}{3K}}$$

entonces:

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{4}{3K}}}$$
$$t_p^2 = \frac{\pi^2}{1-\frac{4}{3K}}$$
$$1-\frac{4}{3K} = \frac{\pi^2}{t_p^2}$$
$$3K-4 = 3K\frac{\pi^2}{t_p^2}$$
$$3K\left(1-\frac{\pi^2}{t_p^2}\right) = 4$$
$$K = \frac{4}{3\left(1-\frac{\pi^2}{t_p^2}\right)}$$
si $t_p = 9 \Rightarrow K = 1.51834$

Podemos ver de la expresión de t_p en función de K que si K se disminuye t_p crece, luego:
$K > 1.51834$.
Finalmente:

$$1.51834 < K < 3.81536$$

Claramente vemos un compromiso entre rapidez para llegar al overshoot y el tamaño de éste, mientras más rápido queramos que el sistema llegue a su valor máximo, más grande es este valor, lo que en la mayoría de los casos es un resultado no deseado.