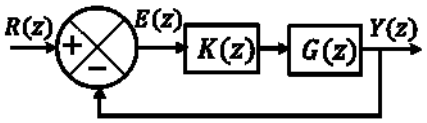
IEE2613 CONTROL AUTOMATICO (I_2 – 2020_I)
(Duración: 120 minutos)

---

1. Se tiene la planta:

$$G(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 + 0.64}$$



y el controlador tipo PD:

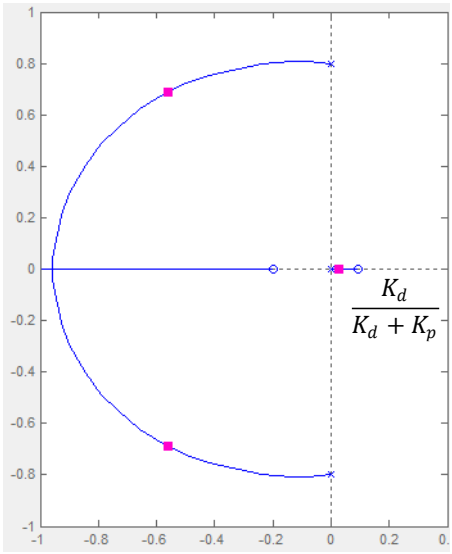
$$K(z) = K_p + K_d\left(\frac{z-1}{z}\right), \qquad K_p, K_d \geq 0$$

¿Cuál es el menor error permanente absoluto, $|e_p|$ que se puede obtener con este controlador para una referencia tipo escalón unitario? Demuéstrelo.

Sol

El controlador agrega un cero que se puede fijar arbitrariamente dentro del círculo unitario y que estará en $z = \frac{K_d}{K_d+K_p}$. (1 punto)

El lugar geométrico de las raíces nos dice que la ganancia debe ser alta para que la raíz compleja inestable de lazo abierto ingrese al círculo unitario, pero a la vez no puede superar la ganancia que saca la raíz inicialmente estables fuera del círculo unitario.



Calculamos la máxima ganancia posible antes que esto último ocurra:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot E(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{1+K(z)G(z)}\frac{z}{z-1} =$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2(z^2+0.64)}{z(z^2+0.64)+(z+0.2)\left(K_p z + K_d(z-1)\right)} = \frac{1.64}{1.64+1.1(K_p+0)} \Rightarrow$$

$$|e_p| = \left|\frac{1.64}{1.64+1.1K_p}\right|$$

(1 punto)

El máximo valor de K_p será aquel que fija la raíz de la izquierda en -1, es decir, antes de que el sistema se inestabilice.

Si $q(z) = z(z^2+0.64)+(z+0.1)\left(K_p z + K_d(z-1)\right)$ (1 punto)

entonces $q(-1) = -1.64 + 0.9(K_p + 2K_d) \Rightarrow K_p = \frac{1.64}{0.9} - 2K_d = 1.82 - 2K_d$ (1 punto)

Luego, el mayor valor de K_p y por ende el menor error $|e_p|$ está dado para $K_d = 0$ ($K_p = 1.82$) (1 punto)

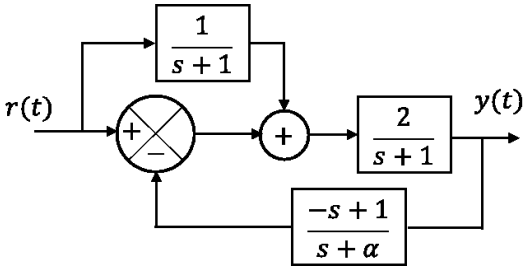
Por lo tanto, el módulo del error permanente es:

$$|e_p| = \left|\frac{1.64}{1.64+1.1K_p}\right| = 0.45$$

(1 punto)

---

2. Para el sistema de la figura, si $\alpha > 0$,
   a) Dibuje en el lugar de las raíces del sistema realimentado en función de α.
   b) ¿Cuáles son los valores de α que inestabilizan el sistema?
   c) Encuentre el valor de $y(t)$ en régimen permanente para una entrada escalón unitario en $r(t)$ cuando el valor de α es el doble de $\alpha_{crítico}$



Sol

La ecuación característica es del sistema es:

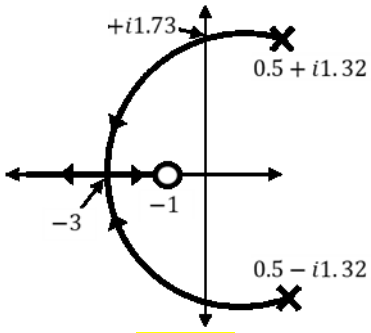
$$q(s) = 1 + \frac{(-s+1)}{(s+1)}\frac{2}{(s+\alpha)} = 0$$

Aislando el parámetro libre α para obtener una forma equivalente a $q(s) = 1 + \alpha G(s) = 0$:

$$q(s) = 1 + \alpha\frac{(s+1)}{s^2 - s + 2} = 0$$

(2 puntos)

a) LGR(α):



(1 punto)

b) $q(s) = s^2 - s + 2 + \alpha(s+1) = s^2 + (\alpha - 1)s + 2 + \alpha = 0$

Según el lugar geométrico, el valor de $\alpha_{crítico}$, es decir el que genera raíces puramente imaginarias es $\alpha = 1$, por lo tanto, los valores que inestabilizan el lazo serán **todos aquellos α menores que 1**

(1 punto)

c) Como para un $\alpha = 2\alpha_{crítico} = 2$, el sistema es estable, podemos aplicar el tema del valor final para $Y(s)$:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot H(s)\frac{1}{s}$$

Donde $H(s)$ es la función de transferencia se $R(s)$ a $Y(s)$, es decir:

$$\left[\left(R(s) - \frac{-s+1}{s+\alpha}Y(s)\right) + \frac{R(s)}{s+1}\right]\frac{2}{s+1}Y(s) \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = H(s) = \frac{2(s+\alpha)(s+2)}{2(s+1)(-s+1) + (s+\alpha)(s+1)^2}$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) \cdot R(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot H(s)\frac{1}{s} = \frac{4\alpha}{2+\alpha} = 2$$

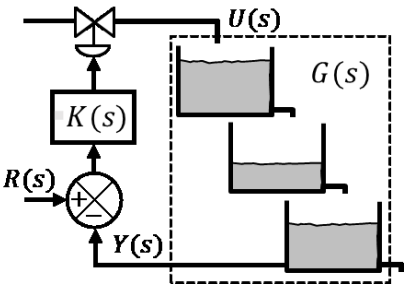
$$y(\infty) = 2$$

(2 puntos)

---

3. La figura muestra un sistema de tres estanques idénticos es serie, cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{2}{(Ts+1)^3}$$

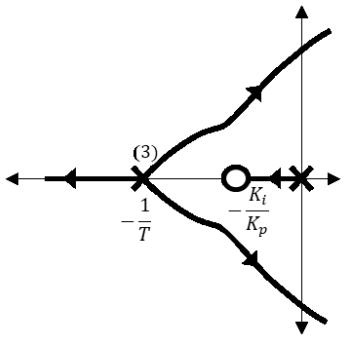


Para reducir los errores de baja frecuencia, se usa un controlador proporcional integral:

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}, \text{ con } K_i = 0.1K_p \text{ y } K_p > 0$$

El sistema realimentado se sometió a pequeños escalones en torno al punto de operación, mientras simultáneamente se incrementaba el valor de K_p (y por ende el de K_i). Al llegar a $K_p = 2$, se observó que el sistema comenzó a oscilar en forma permanente.

Determine los valores de T y la frecuencia de oscilación.



Sol
El LGR de la figura indica que el incremento de la ganancia K_p generará 2 raíces inestables que al cruzar el eje imaginario causarán una oscilación permanente en ese punto.

Encontraremos la frecuencia de esta oscilación calculando las raíces puramente imaginarias que ocurren en ese punto.

$$q(s) = 1 + K_p \frac{s + K_i/K_p}{s} \cdot \frac{2}{(Ts+1)^3} = s(Ts+1)^3 + 2K_p(s+0.1) = 0$$

$$q(s) = T^3 s^4 + 3T^2 s^3 + 3Ts^2 + (2K_p + 1)s + 0.2K_p = 0 \quad \text{(1 punto)}$$

Opción 1
Luego, para el cruce una de las dos trayectorias por el eje imaginario, tendremos que $s = j\omega$, por lo tanto:
$q(j\omega) = T^3\omega^4 - j3\omega^3T^2 - 3\omega^2T + j\omega(2K_p + 1) + 0.2K_p = 0$

separando parte imaginaria y real:

Parte real: $T^3\omega^4 - 3T\omega^2 + 0.2K_p = 0$ (1 punto)

Parte imaginaria: $-3T^2\omega^2 + 1 + 2K_p = 0 \implies \omega^2 = \frac{1+2K_p}{3T^2}$ (1 punto)

Luego,

$\frac{(1+2K_p)^2}{9} - (1 + 2K_p) + 0.2K_pT = 0 \implies T = \frac{1}{0.2K_p}\left((1 + 2K_p) - \frac{(1+2K_p)^2}{9}\right) = \frac{1}{0.2\cdot 2}\left(5 - \frac{25}{9}\right) = 5.555$ (2 puntos)

y

$\omega = \sqrt{\frac{1+2K_p}{3T^2}} = \sqrt{\frac{5}{3\times 5.555^2}} = 0.23\,\frac{rad}{s}$ o $f = 0.037\ Hz$ (1 punto)

Opción 2
Partiendo de la ecuación característica ya calculada (1 punto)

$$q(s) = T^3 s^4 + 3T^2 s^3 + 3Ts^2 + (2K_p + 1)s + 0.2K_p = 0$$

Construcción tabla R-H:

T^3	$3T$	$0.2K_p$	> 0
$3T^2$	$2K_p + 1$	--	> 0
$\frac{4T}{3}$	$\frac{2}{5}$		> 0
$5 - 0.9T$			< 0 si $T < 5.55$
> 0			> 0

$b_{n-1} = -\frac{1}{3T^2}(T^3(2K_p + 1) - 9T^3) = \frac{2T}{3}(4 - K_p) = \frac{4T}{3}$
$b_{n-3} = -\frac{1}{3T^2}(0 - 0.6T^2K_p) = \frac{0.6}{3}K_p = \frac{2}{5}$
$c_{n-1} = -\frac{3}{2T(4-K_p)}\left(0.6T^2K_p - (2K_p + 1)\frac{2T}{3}(4 - K_p)\right) = 2K_p + 1 - \frac{0.9TK_p}{(4-K_p)} = 5 - 0.9T$
$d_{n-1} = -\frac{3}{2T(4-K_p)}\left(0.6T^2K_p - (2K_p + 1)\frac{2T}{3}(4 - K_p)\right) = 2K_p + 1 - \frac{0.9TK_p}{(4-K_p)} = 5 - 0.9T$
(1 punto)

El sistema es inestable si $c_{n-1} \leq 0$ ($T \geq 5.5555$), es decir, para la condición crítica, $c_{n-1} = 0$ y $T = 5.5555$ s (2 puntos)

No es necesario calcular el parámetro d_{n-1}, pues el LGR nos dice que existirán 2 raíces puramente imaginarias en condición crítica, es decir 2 cambios de signo en la primera columna.

Esto implica que en situación crítica, $s = j\omega$:

$$q(j\omega) = T^3\omega^4 - j3\omega^3T^2 - 3\omega^2T + j\omega(2K_p + 1) + 0.2K_p = 0$$ (1 punto)

Tomando sólo las componentes imaginarias de $q(j\omega)$: $-3T^2\omega^2 + 1 + 2K_p = 0$

Es decir,

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + 2K_p}{3T^2}} = \sqrt{\frac{5}{3 \times 5.55555^2}} = 0.23 \text{ rad/seg}$$

(1 punto)