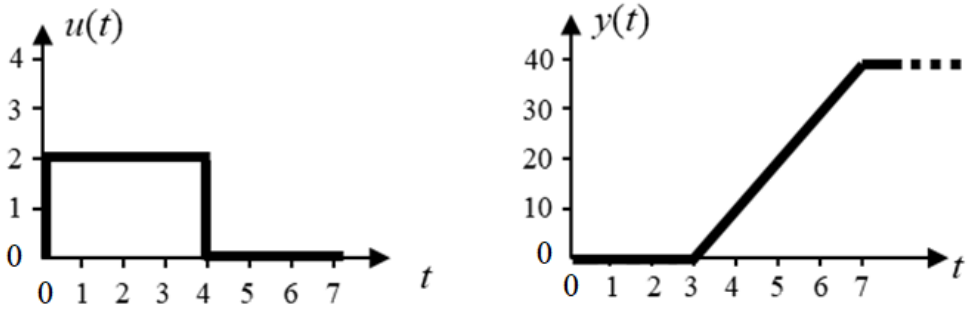
EXAMEN DE CONTROL AUTOMATICO (2020-I)
(Duración: 120 minutos)

Enviar todas las respuestas en solo un SOLO UN ARCHIVO a: aguesala@ing.puc.cl
SE ACEPTARÁ SÓLO LA PRIMERA ENTREGA

1.- A una planta desconocida, inicialmente en estado 0, se le introduce un valor de entrada en lazo abierto $\boldsymbol{u(t)}$ como indica la figura, generando la respuesta indicada por $\boldsymbol{y(t)}$ en el gráfico. Encuentre un modelo lineal para el proceso y determine la ganancia crítica del lazo realimentado resultante cuando la planta se controla sólo con acción proporcional.

NOTA: encuentre el valor exacto, NO aproximaciones



Sol:
Mediante simple inspección observamos que la planta es un integrador con un retardo L. Es decir, la planta es de la forma:

$$y(t) = C\int_0^t u(\tau - L)d\tau$$

También se puede representar mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = Cu(t-L)$$

1pto

De los gráficos, el retardo es de $L = 3$ y la ganancia es $C = 5$. Por lo tanto, el modelo del sistema es:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 5u(t-3)$$

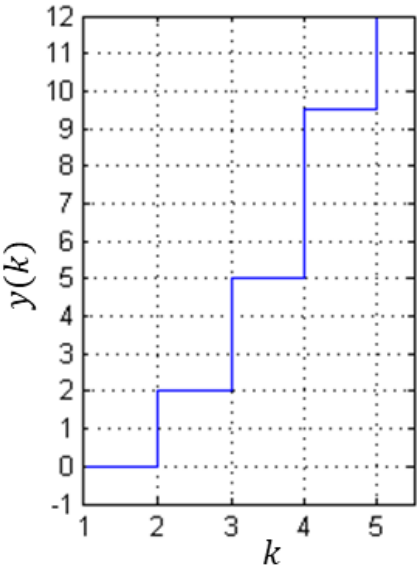
En el dominio de Laplace el sistema es:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 5\frac{e^{-3s}}{s}$$

2ptos

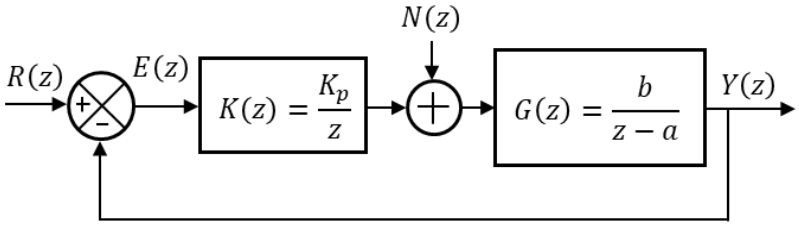
Dado que la planta tiene un retardo debemos utilizar técnicas de estabilidad en frecuencia. En este caso la ganancia critica se obtiene calculando el margen de ganancia (MG).
La fase del sistema es $\angle F(j\omega) = -3\omega - \pi/2$ **1pto**
Para encontrar el margen de ganancia necesitamos resolver $\angle F(j\omega) = -\pi$.
Reemplazando se obtiene $\omega_c = \pi/6$ **1pto**
La magnitud de la planta es $|F(j\omega_c)| = 5/\omega_0 = 30/\pi$
por lo tanto el margen de ganancia es $MG = \frac{1}{|F(j\omega_c)|} = \pi/30$
La ganancia crítica del sistema retroalimentado es $K = \pi/30$ **1pto**

2. La planta $G(z)$, **en lazo abierto**, responde como en el gráfico cuando se le inyecta un escalón unitario en la entrada en el instante $k = 1$.



Luego la planta se realimenta con un controlador proporcional $K(z) = K_p > 0$ como en la figura y se aplican escalones a $R(z)$ y $N(z)$ de montos A y $A/2$ respectivamente.

Para estas entradas, determine si es posible obtener un error permanente absoluto, $|E(1)| = |R(1) - Y(1)|$ menor a $0.01A$.



Sol.

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1)$$
$$y(2) = 2 = a \cdot 0 + b \cdot 1 \quad \rightarrow \quad b = 2$$
$$y(3) = 5 = a \cdot 2 + 2 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad a = 1.5$$

Se ve que $a = 1.5$ y $b = 2$ **1,5 ptos**

La función de transmitancia para $Y(z)$ en función de $R(z)$ y $N(z)$ es:

$$E(z) = \frac{z(z-1.5)}{z(z-1.5)+2K_p}R(z) + \frac{2z}{z(z-1.5)+2K_p}N(z)$$

1,5 ptos

$$E(z) = \frac{z(z-1.5)}{z(z-1.5)+2K_p}\frac{Az}{(z-1)} - \frac{2z}{z(z-1.5)+2K_p}\frac{A/2}{(z-1)}$$

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot E(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\left(\frac{z(z-1.5)}{z(z-1.5)+2K_p}\frac{A}{(z-1)} - \frac{2z}{z(z-1.5)+2K_p}\frac{A/2}{(z-1)}\right)$$

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z(z-1.5)A}{z(z-1.5)+2K_p} - \frac{Az}{z(z-1.5)+2K_p}\right) = -\frac{0.5A}{2K_p-0.5} - \frac{A}{2K_p-0.5} = -\frac{1.5A}{2K_p-0.5}$$

1pto

Para obtener error menor que $0.01A$ se necesita $\left|\frac{1.5A}{2K_p-0.5}\right| < 0.01A$, es decir $K_p > \frac{(150+0.5)}{2} = 75.25$

1pto

Verificamos estabilidad:
Ecuación característica: $q(z) = z^2 - 1.5z + 2K_p = 0$ => $z = 0.75 \pm \sqrt{2.25/4 - 2K_p}$

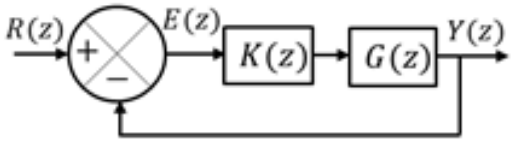
1pto

Para $K_p > 75.25$, claramente se ve que $|z| > 1$, por lo tanto el lazo cerrado es inestable y no es posible obtener el error requerido

1pto

3. En un proceso de una entrada y una salida, discreto y de período 1 hora, su salida es función de las entradas y salidas anteriores. Es así como su salida en un instante determinado, es igual a la suma de:

   - El 80% de la salida 1 hora antes
   - El 30% de la salida 2 horas antes, con signo negativo
   - El 50% de la entrada 1 hora antes
   - El 50% de la entrada 2 horas antes, con signo negativo



   El proceso es realimentado negativamente (ver figura) y el error respecto a una referencia fija se hace pasar por un controlador integral $K(z) = K_i \frac{z}{z-1}$. ¿Es posible hacer el valor absoluto del error en régimen menor a un 1% de un escalón unitario en la referencia? ¿Para qué valores de K_i? Demuestre.

Sol.
Ecuación de diferencia: $y_k = 0.8y_{k-1} - 0.3y_{k-2} + 0.5u_{k-1} - 0.5u_{k-2}$
2ptos

Aplicando transformada Z:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 0.5\frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.3z^{-2}} = 0.5\frac{z-1}{z^2 - 0.8z + 0.3}$$

El error de control del sistema en lazo cerrado será:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} = \frac{(z^2 - 0.8z + 0.3)(z-1)}{(z^2 - 0.8z + 0.3)(z-1) + 0.5K_i z(z-1)} = \frac{(z^2 - 0.8z + 0.3)}{(z^2 - 0.8z + 0.3) + 0.5K_i z}$$

1pto

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot E(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot \frac{z^2 - 0.8z + 0.3}{z^2 - 0.8z + 0.3 + 0.5K_i z}\frac{z}{z-1} = \frac{0.5}{0.5(1+K_i)}$$

1pto

Para error en régimen menor a 1% se requiere que $\frac{1}{1+K_i} < 0.01$, es decir $K_i > 99$.

1pto

Analizando estabilidad, la ecuación característica del sistema realimentado es:

$$q(z) = z^2 + (K_i - 0.8)z + 0.3 = 0$$

y las raíces serán:

$$z_{1,2} = \frac{(K_i - 0.8)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(K_i - 0.8)^2 - 4\cdot 0.3}$$

Claramente se ve que para el valor de K_i necesario ($K_i > 99$), el sistema es inestable, pues $|z_{1,2}| > 1$
1pto