Tema: Respuesta dinámica de sistemas de 2° orden

◁ *Guía de Ejercicios # 13* ▷

1. Bosqueje la respuesta al escalón de la planta:

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para $\omega_n = 4$ y diversos coeficientes de amoritugación $\xi = 0.2, 0.7, 2.5$.

Solución

(a) $\xi = 0.2$:
Se tienen los siguientes parámetros importantes en el caso sub amortiguado $(0 < \xi < 1)$.

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)$$

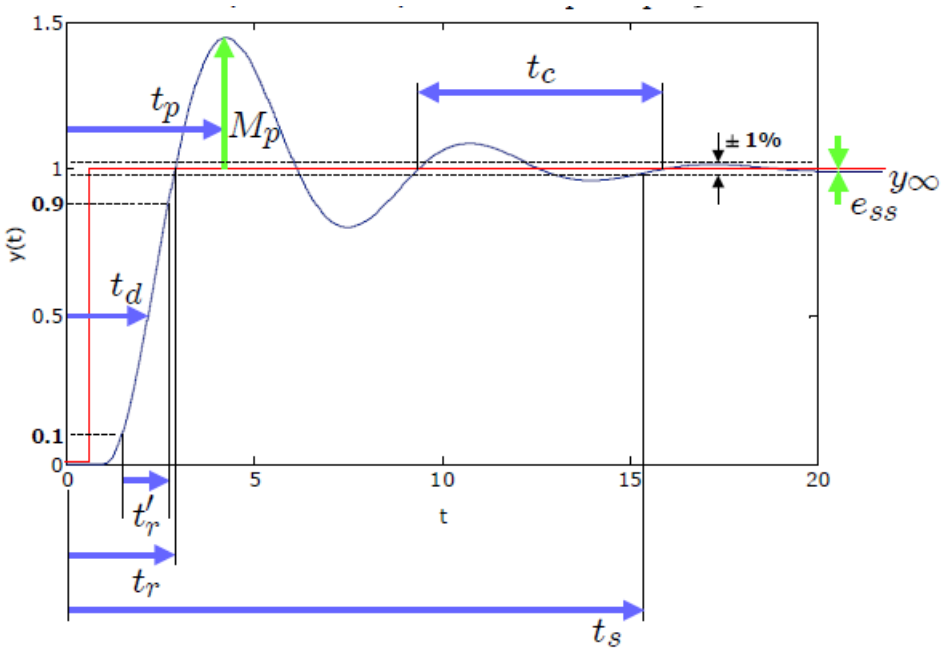


Figura 1: Respuesta al escalón

Si $\xi = 0.2 \Rightarrow$ caso subamortiguado.

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{K\,4^2}{s^2 + 2\cdot 0.2\cdot 4s + 16} = \frac{16K}{s^2 + 1.6s + 16} \\
\gamma &= \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 4.899 \\
\beta &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 3.9192 \\
\phi &= \arctan(\gamma) = 1.3694 \text{ rad} = 78.463^\circ
\end{aligned}$$

Tiempo de respuesta

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\beta} = 0.4522$$

Tiempo de peak

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} = 0.8016$$

Peak máximo o sobreoscilación

$$M_p = e^{-\frac{\pi}{\gamma}} = 0.5266$$

Tiempo de estabilización (Entra en un error de 1%)

$$t_{ss} = \frac{4.61 - log(\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} = 5.788$$

Periodo

$$t_c = \frac{2\pi}{\beta} = 1.6032$$

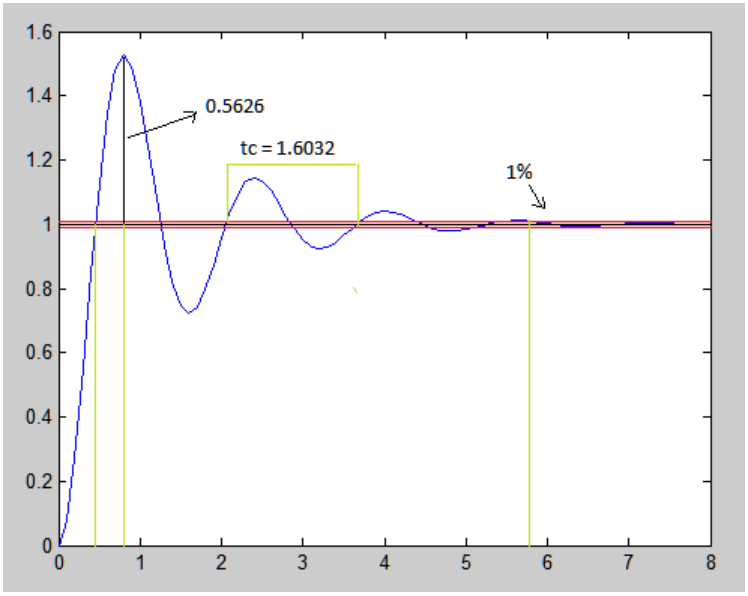


Figura 2: Respuesta al escalón para $\xi = 0.2$

(b) $\underline{\xi = 0.7}$:

Si $\xi = 0.7 \Rightarrow$ caso subamortiguado.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K\,4^2}{s^2 + 2\cdot 0.7\cdot 4s + 16} = \frac{16K}{s^2 + 5.6s + 16} \\ \gamma &= \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 1.0202 \\ \beta &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2.8566 \\ \phi &= \arctan(\gamma) = 0.7954rad = 45.57^\circ \end{aligned}$$

Tiempo de respuesta

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\beta} = 0.8213$$

Tiempo de peak

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} = 1.0998$$

Peak máximo o sobreoscilación

$$M_p = e^{-\frac{\pi}{\gamma}} = 0.046$$

Tiempo de estabilización (Entra en un error de 1%)

$$t_{ss} = \frac{4.61 - log(\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} = 1.7667$$

Periodo

$$t_c = \frac{2\pi}{\beta} = 2.1996$$

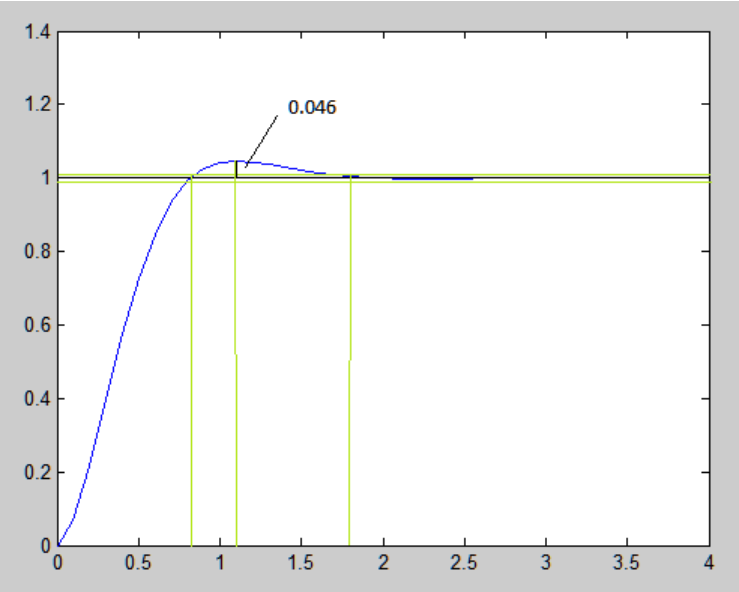


Figura 3: Respuesta al escalón para $\xi = 0.7$

(c) $\underline{\xi = 2.5}$:

Si $\xi = 2.5 \Rightarrow$ caso sobreamortiguado.

Las raíces del sistema:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\,4^2}{s^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot 4s + 16} = \frac{16K}{s^2 + 20s + 16}$$

son reales

$$s_{1,2} = \xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -10 \pm 4\sqrt{2.5^2 - 1}$$

La respuesta $Y(s)$ al escalón $U(s) = \frac{1}{s}$ de un sistema $F(s)$ con raíces reales s_1 y s_2 distintas está dada por:

$$Y(s) = \frac{K_0}{(s-s_1)(s-s_2)s} = K_0\left[\frac{1}{s_1 s_2} - \frac{1}{s_1(s_2-s_1)}\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s_2(s_1-s_2)}\frac{1}{s-s_2}\right]$$

En este caso $s_1 - s_2 = 2\omega_n\sqrt{\xi^2-1} = -(s_2-s_1)$ y $s_1 s_2 = \omega_n^2$ con $K_0 = \omega_n^2$. Luego, al aplicar la transformada de Laplace inversa se tiene que:

$$y(t) \quad = \quad 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right]$$

Si se soluciona $|1 - y(t)| < 0.001$ se obtiene un valor de $t_{ss} = 5.57$.

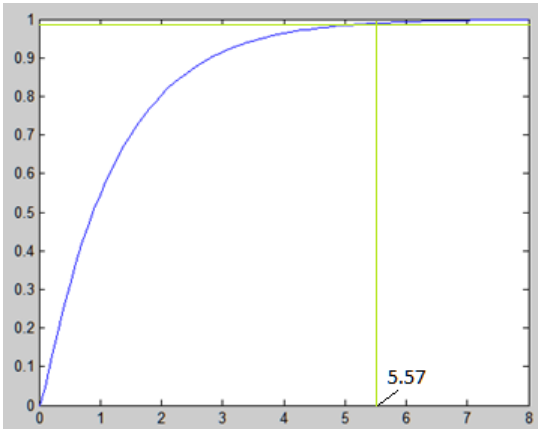


Figura 4: Respuesta al escalón para $\xi = 2.5$

2. Encuentre la sobreoscilación de la respuesta al escalón para la planta:

$$F(s) = \frac{4}{s^2+4s+4}$$

Solución

$F(s)$ tiene la forma estándar:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$
$$\Rightarrow \omega_n^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \omega_n = 2$$
$$2\xi\omega_n = 4 \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{4}{2\omega_n} = 1$$

Soluciones de $q(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ están dadas por:

$$s = \alpha \pm j\beta$$
$$\alpha \quad = \quad -\xi\omega_n = -2$$
$$\beta \quad = \quad \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2\sqrt{1-1} = 0$$

$\xi = 1 \quad \rightarrow$ Sistema críticamente amortiguado
($\xi > 1$ sobre amortiguado)
($\xi < 1$ sub amortiguado)

Para $\xi = 1$, $\beta = 0 \Rightarrow$ la respuesta no oscila $\Rightarrow$ no tiene sentido hablar de "sobreoscilación" u "*overshoot*", pues no existe. Visto de otra manera:

$$M_p = e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} = e^{\frac{\alpha\pi}{0}} = e^{\alpha\pi\infty} = 0$$

dado que $\alpha < 0$.

Notar que $\xi = 1$ corresponde a:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

dos raíces repetidas $s = -\omega_n$.

3. Encuentre la respuesta al escalón de la planta:

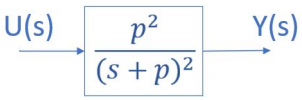


Figura 5: Planta

Solución

Esta planta tiene dos raíces repetidas en $s = -p$. La respuesta al escalón se puede obtener a partir de:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2}{(s+p)^2}\frac{1}{s}\right\}\end{aligned}$$

Empleando la descomposición usando fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{p^2}{(s+p)^2 * \frac{1}{s}} = \frac{A}{(s+p)} + \frac{B}{(s+p)^2} + \frac{C}{s}$$

con

$$\begin{aligned}B &= Y(s)\,(s+p)^2\big|_{s=-p} = \left.\frac{p^2}{s}\right|_{s=-p} = -p \\ A &= \frac{d}{ds}\left(Y(s)(s+p)^2\right)\big|_{s=-p} = -\left.\frac{p^2}{s^2}\right|_{s=-p} = -1 \\ C &= Y(s)s|_{s=0} = \left.\frac{p^2}{(s+p)^2}\right|_{s=0} = 1\end{aligned}$$

Recordando las propiedades de la transformada de Laplace (ver recuadro).

Propiedades de desplazamiento de la transformada de Laplace

Desplazamiento en frecuencia:	$f(t) * e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$
Desplazamiento en en el tiempo:	$f(t-T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-Ts}F(s)$

El término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+p)^2}\right\} = e^{-pt}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = e^{-pt}t$$

Luego la respuesta al escalón está dada por:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+p} - p\frac{1}{(s+p)^2}\right\} = 1 - e^{-pt} - pte^{-pt}.$$

Es fácil verificar que $y(\infty) = 1 - 0 - 0 = 1$. Verifique también con el TVF.

¿Existe un *over/under-shoot*? En otras palabras, ¿hay sub/sobre-amortiguación?

No puede existir porque se trata de la concatenación de dos sistemas de primer orden estables $\frac{p}{s+p}$, y estos siempre tienen una respuesta sobreamortiguada y no es posible "subamortiguarlos", por lo que es imposible que la concatenación genere en lazo abierto respuestas subamortiguadas. Matemáticamente es posible buscar el máximo, suponiendo que existiese uno como en el caso de los sistemas subamortiguados. Para esto se procede como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= pe^{-pt} - pe^{-pt} + p^2te^{-pt} = 0\\ &= p^2te^{-pt} = 0\\ &\Rightarrow t = 0 \text{ ó } t = \infty\end{aligned}$$

Sin embargo, en $t = 0$, se tiene un mínimo $y(0) = 0$ y en $t = \infty$ se tiene un máximo $y(\infty) = 1$, pero no existen otras soluciones en instantes intermedios. Por lo que ¡no hay *overshoot*! La gráfica de la señal resultante también confirma esta conclusión.

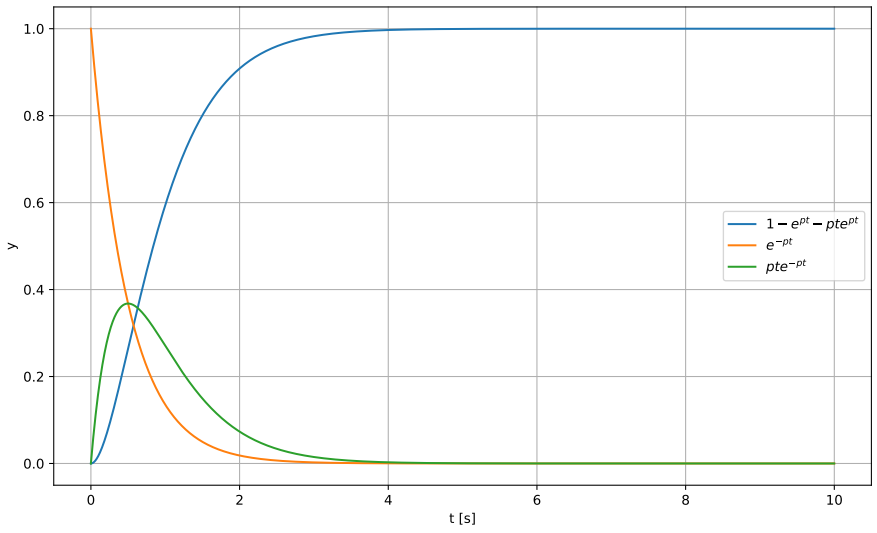


Figura 6: Sistema no tiene overshoot