Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2613 - Control Automático

Ayudantía 5

Routh-Hurwitz y LGR

27 de Septiembre 2024

Rodrigo Molina - rodrigo.molina@uc.cl

Problema 1

En un lazo de control nominal de un grado de libertad, la planta y el controlador están dados por:

$$G_o(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} \quad , \quad C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Determine la región de estabilidad interna en el plano (K_p, K_i). Es decir, grafique todos los pares (K_p, K_i) para los cuales el lazo cerrado es estable.

Solución:

El controlador $C(s)$ puede ser escrito como:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{sK_p + K_i}{s}$$

Así, se pueden identificar los siguientes elementos de la ecuación en lazo cerrado. Primero, de $C(s)$:

$$P(s) = sK_p + K_i \quad , \quad L(s) = s$$

Luego, de $G_o(s)$:

$$B_o(s) = 2 \quad , \quad A_o(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

Luego, para analizar la estabilidad del lazo se debe mirar el polinomio característico:

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) \\ &= s\left(s^3 + 4s^2 + 5s + 2\right) + 2\left(sK_\rho + K_i\right) \\ &= s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2(1 + K_p)s + 2K_i \end{aligned}$$

A partir del cual se construye el arreglo de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 5 & 2K_i \\ s^3 & 4 & 2\left(1 + K_p\right) & 0 \\ s^2 & c_1 & c_2 & \\ s^1 & \gamma_{4,1} & & \\ s^0 & 2K_i & & \end{array}$$

Donde c_1 y c_2 se obtienen como sigue:

$$c_1 = \frac{2(1 + K_p) - 20}{-4}$$

$$c_1 = \frac{9 - K_p}{2}$$

$$c_2 = \frac{1 \cdot 0 - 8K_i}{-4}$$

$$c_2 = 2K_i$$

Por lo que queda de la siguiente forma el arreglo de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 5 & 2K_i \\ s^3 & 4 & 2\left(1 + K_p\right) & 0 \\ s^2 & \frac{9-K_p}{2} & 2K_i & \\ s^1 & \gamma_{4,1} & & \\ s^0 & 2K_i & & \end{array}$$

Con lo que se obtiene ahora $\gamma_{4,1}$ como sigue:

$$\gamma_{4,1} = 2\frac{(9 - K_p)(1 + K_p) - 8K_i}{9 - K_p}$$

Por lo tanto, el lazo es internamente estable si no hay cambios de signos en la primera columna del arreglo de Routh, lo que significa que no hay raíces en el semiplano derecho. Esto se traduce en las siguientes desigualdades:

$$\frac{9-K_p}{2} \rightarrow K_p < 9$$

$$2\frac{(9-K_p)(1+K_p)-8K_i}{9-K_p} > 0 \rightarrow K_i < -\frac{K_p^2}{8} + K_p + \frac{9}{8}$$

$$2K_i > 0 \rightarrow K_i > 0$$

Por lo que la región de estabilidad en el plano (K_p, K_i) se ve como sigue:

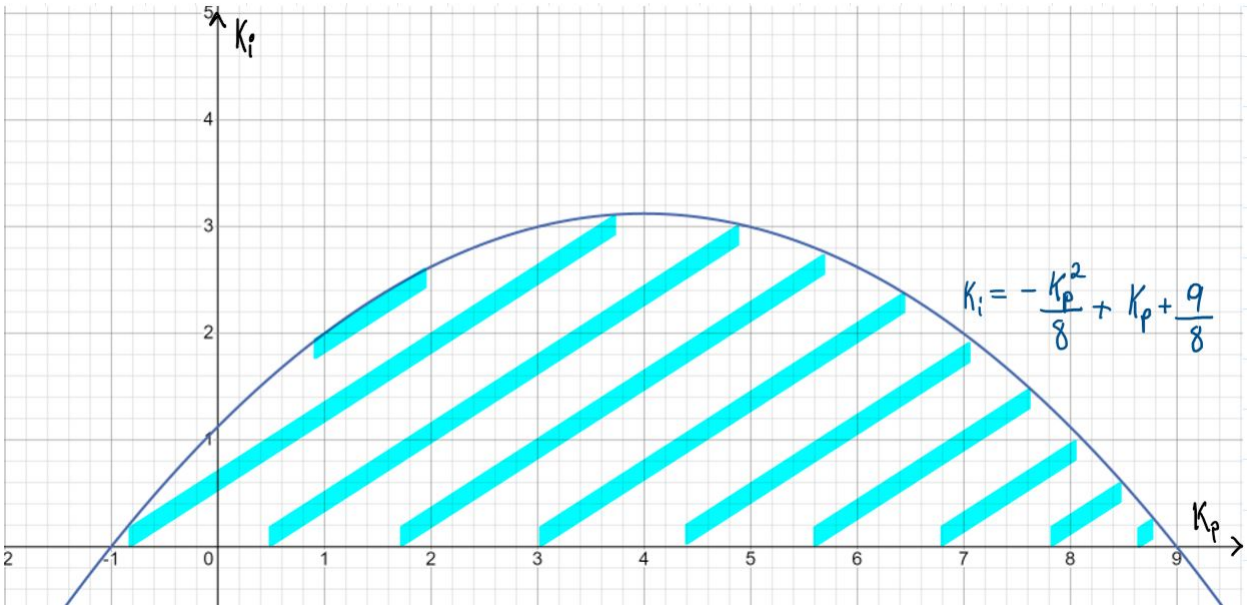


Figura 1: Región de estabilidad

Pregunta 2

Considere un lazo de control estándar de un grado de libertad con planta y controlador dados por:

$$G_o(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2(s-4)} \quad , \quad C(s) = K\frac{s+4}{s}$$

Dibuje el lugar geométrico de las raíces para $K < 0$ ¿Existe algún valor de K negativo tal que el controlador estabilice el lazo?

Solución:

Observando que se pide el LGR negativo, nos interesa expresar el polinomio en lazo cerrado de la forma $1 + KF(s) = 0$:

$$A_{cl}(s) = s(s+2)^2(s-4) + K(s-1)(s+4) = 0$$

$$1 + K\frac{(s-1)(s+4)}{s(s+2)^2(s-4)} = 0$$

A partir de esto, se pueden realizar las siguientes observaciones:

- $n = 4$ polos , $m = 2$ ceros $\rightarrow$ Hay 4 ramas en el LGR
- Dado que $K < 0$, existe LGR **a la derecha** de un número impar de polos y ceros.
- Cuando $K \rightarrow 0$, el LGR parte en los polos de $F(s)$, es decir en $s = \{-2, 0, 4\}$ (en $s = -2$ hay dos polos).
- Cuando $K \rightarrow -\infty$, el LGR termina en los ceros de $F(s)$, es decir, en $s = \{-4, 1\}$. Además, 2 raíces tienden a infinito (hay dos polos más que ceros).
- Dado que es LGR negativo, las dos raíces ($n-m = 2$) que tienden a infinito lo hacen siguiendo asíntotas con el siguiente ángulo ϕ_l.

$$\phi_l = \frac{360^o(l-1)}{n-m} \quad , \quad l \in \{1, 2\}$$

$$\phi_1 = 0^o$$

$$\phi_2 = 360^o$$

Con toda esta información, se puede dibujar el LGR. Este resulta en el siguiente:

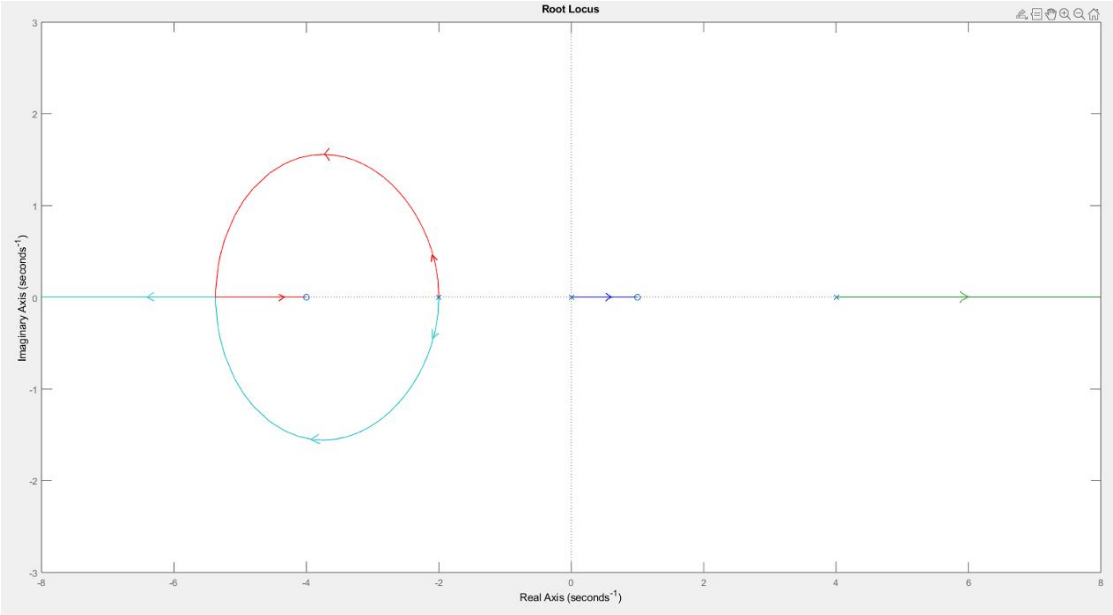


Figura 2: LGR Resultante

Desde el LGR, se puede observar que no existe $K < 0$ tal que el controlador estabilice el lazo cerrado. Esto es porque hay polos que independiente del valor de K, siempre se quedan en el semiplano derecho.